

ЗАДАЧИ ПО ОПТИКЕ

Издательство «Мир» Москва 1976

Сборник задач по физической оптике составлен известными французскими учеными и предназначен для студентов, специализирующихся в области оптики и спектроскопии. Многие задачи будут полезны также и студентам других специальностей при изучении курса общей физики. В книгу включено большое число разнообразных задач по важнейшим разделам физической оптики с учетом последних достижений в этой области (голография, лазеры и т. д.). Для всех задач приведены подробные решения, в которых разбираются как физическая, так и математическая стороны вопроса.

Книга представляет большой интерес для студентов университетов, педагогических и многих технических (оптико-механических, приборостроительных, физико-технических и т. п.) институтов, а также для преподавателей физических дисциплин.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ	7
1. Контрастность полос Юнга	7
2. Опыт Юнга. Ахроматические полосы	20
3. Фурье-спектроскопия	23
4. Интерферометр Маха	28
5. Интерферометр Майкельсона	33
6. Интерференционные фильтры	40
7. Эталон Фабри — Перо. Использование экранов	41
8. Наблюдение фазовых объектов методом Толанского	44
9. Спектроскопия Фабри — Перо (интерференционная)	48
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ОПТИКА	57
10. Интерференция радиоволн	57
11. Формулы Френеля	60
12. Формулы Френеля. Тонкие пленки	62
13. Кольца Ньютона в поляризованном свете	65
14. Распространение волн в слоистой диэлектрической среде	66
15. Электромагнитные волны в резонаторе	77
16. Давление излучения	80
17. Антенны	81
18. Диполи Герца	86
ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ	93
19. Фотометрия. Система Земля — Солнце	93
20. Спектры и энергия лазера	95
21. Оптические константы германия	100
22. Поглощение. Черные и цветные тела	101
23. Поглощение. Закон Кирхгофа	105
ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ	110

24. Параметры Стокса. Представление Пуанкаре. Матрицы Мюллера	110
25. Формулы Френеля. Двоякопреломляющая призма	117
26. Поле поляризующих призм	120
27. Вращательная дисперсия	123
28. Двукратное прохождение лучей через четвертьволновую пластинку	126
29. Двоякопреломляющий монохроматор	129
30. Опыты Френеля и Араго	130
31. Поляризационный интерферометр. Дифференциальный метод	136
32. Электрическое двойное лучепреломление	143
33. Вращательная способность. Круговой дихроизм	145
34. Эффект Фарадея	151
ДИФРАКЦИЯ	154
35. Дифракция на большом расстоянии	154
36. Дифракция на круглом зрачке	171
37. Опыт Аббе	184
38. Голография	196
39. Отражательные решетки	206
40. Нерегулярная решетка	212
41. Фазовая решетка	216
42. Получение и дифракция рентгеновских лучей	224
43. Рентгеновский спектрометр с изогнутым кристаллом	228
РЕФРАКЦИЯ И ДИСПЕРСИЯ	231
44. Групповая и фазовая скорости	231
45. Измерение скорости света методом Фуко	232
46. Скорость света в движущейся воде	236
47. Распространение волн в периодической дискретной среде	238
48. Дисперсионная формула Зельмейера	241
49. Дисперсия в области слабого поглощения	247
50. Полосатые спектры. Аномальная дисперсия в парах	250
51. Рассеяние электромагнитного излучения в классической атомной модели	255
52. Дисперсия и отражение ионных кристаллов в инфракрасной области спектра	264
53. Пропускание поглощающей тонкой пленки	270
54. Электромагнитные волны в плазме	272
55. Колебания плазмы	275
КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА	278
56. Электромагнитные волны и волны де Бройля	278
57. Пять упражнений на соотношение неопределенности	282
58. Потенциальный барьер	286
59. Дейтрон	292
60. Двойная потенциальная яма	295
61. Операторы углового момента	301
62. Эффект Комптона	302
63. Формула излучения Планка	305

64. Основное состояние двухэлектронного атома	310
65. Возмущение первого порядка. Основное состояние атома гелия	312
66. Возмущение второго порядка. Эффект Штарка для ротатора	316
67. Внутримолекулярный потенциал этана	319
68. Колебательно-вращательная энергия двухатомной молекулы	325
АТОМНЫЕ И МОЛЕКУЛЯРНЫЕ СПЕКТРЫ	329
69. Спектр атома водорода	329
70. Спектр нейтрального лития	335
71. Эффект Доплера. Ширина спектральной линии	343
72. Поляризация резонансного излучения	348
73. Спектральные термы двухэлектронных атомов	355
74. Эффект Зеемана для двухэлектронного атома	360
75. Спектры рентгеновских лучей	364
76. Эффект Мессбауэра	369
77. Колебательный и вращательный спектры молекулы йодистого водорода	372
78. Расчет скорости света	377
79. Спектроскопия и удельная теплоемкость	379
Приложение А	388
Преобразование Фурье	388
Приложение Б	407
Степень когерентности между двумя точками, освещаемыми удаленным монохроматическим источником	407
Предметный указатель	410

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аббе опыт 184	— первого порядка 312
Автокорреляция 395	Волны в плазме 272
Аномальная дисперсия 250	— де Бройля 278
Антенны 81	— распространение в периодической дискретной среде 238
Аподизация 173, 181	Восстановление формы объекта 197
Аппаратная функция 18	Вращательная способность 125
Атомные спектры 329	Вращательное квантовое число 325
Ахроматические полосы 20	Вращательный спектр 372
Бабине принцип 179	Гармонический осциллятор 283
Бесселя функция 174	Гаусса функция 400
Бора постулат 330, 332	Гейзенберга микроскоп 283
Борна — Оппенгеймера приближение 325	Германий, оптические константы 100
Брэгга формула 226	Герца диполи 81, 86, 259
Ван Циттерта — Цернике теорема 14, 109	Глана поляризатор 123
Верде постоянная 152	Глазеврука призма 122
Видность 7	Голография 196
Вина постоянная 306	Граница поглощения рентгеновских лучей 364
Возмущение второго порядка 316	Групповая скорость 231

Гюйгенса построение 138
Давление излучения 80
Двойная потенциальная яма 295
Двоякопреломляющая призма 117
Двухатомные молекулы,
 колебательно-вращательная
 энергия 325
— — эффект Штарка 316
Двухэлектронные атомы, основное
 состояние 310
— — спектральные термы 355
— — эффект Зеемана 360
Дейтрон 292
Дирака импульс 405
— распределение 396
Дисперсия 231, 279
— в области слабого поглощения 247
— для классических металлов 257
— формула Зельмейера 241
Дифракция 154
— на круглом зрачке 171
— — решетке 159
— от щели 156
— рентгеновских лучей 224
Дихроизм 145
— круговой 145
Закон Кирхгофа 105
— Мозли 364
— Рэлея — Джинса 306
— Стефана 306
Зельмейера формула 241, 254
Излучение 93
— формула Планка 305
Интерференционные полосы,
 контрастность 134
Интерференция радиоволн 57
— световых волн 7
Интерферометр Майкельсона 33
— Маха 28
— поляризационный 136
— Фабри — Перо 48
Ионные кристаллы, дисперсия в ИК-
 области 264
Кастлера — Монтарнала установка

223
Классический атом, модель
 рассеяния 255
Когерентности степень 407
Когерентность частичная 409
Комплексная диэлектрическая
 проницаемость 262
Комптоновская длина волны 278
Контрастность 29, 217, 403
— полос Юнга 7
— фазовая 217
Корреляция 395
Лазер, спектры 95
— энергия 95
Ланде множитель 348
Линзы голографические 202
Лучепреломление двойное 110
— — в электрическом поле 143
Молекулярные спектры 329
Монохроматор 129
— с двойным лучепреломлением 129
Мюллера матрицы 111
Ньютона кольца 65
Операторы углового момента 301
Оптическая плотность 7
Основное состояние гелия 312
Осциллятора сила 242
Парсеваля теорема 189, 394
Пары олова, дисперсия 253
Плазма 372
Пластика полуволновая 131, 137
— четвертьволновая 126
Поглощение 93, 101
Пойнтинга вектор 83
Показатель преломления
 комплексный 267
Полосатые спектры 123, 250
Поляризационные призмы 120
Поляризация резонансного
 излучения 348
Потенциал внутримолекулярный
 этана 319
Потенциальный барьер 289
Пуанкаре сфера 110

Пуассона распределение 396
Радиоволны 57
Разрешающая способность 186
Рассеяние излучения 255
Резонансное излучение 348
Резонаторы 77
Рентгеновские лучи 224, 364
Рентгеновский спектрометр 228
Рефракция 231
Решетка нерегулярная 212
— отражательная 206
— синусоидальная 168, 205
— фазовая 216
— Фраунгофера 184, 212
— Фуко 168, 209
— эшелетт 207, 210
Свертка 393
Серия Бальмера 329, 330, 332, 334, 343
— Лаймана 333, 343
— Пашена 343, 345
— Пикеринга 329, 334
— Ридберга 329, 334
Слоистые среды 66
Скорость света 377
— — в движущейся воде 236
— — измерение методом Фуко 232
Соотношение неопределенности 282
Спектр атома водорода 329
— дейтерия 329
— комбинационного рассеяния 380
— лития 335

— рентгеновских лучей 364
— термы 335, 350, 355
— ширина линии 336, 353
Стокса вектор 111
Тонкие пленки 62
— — поглощение 270
— — пропускание 270
Удельная теплоемкость 379
Фабри — Перо спектроскопия 48
— — эталон 41
Фазовая пластинка 182
— скорость 231
Фокусирующие дефекты 173, 183
Френеля — Араго опыты 130
— формулы 60, 62, 117
Фурье преобразование 9, 15, 189, 388
Цветное тело 101
Черное тело 101
Эйри диск 178
Электромагнитная оптика 57
Электромагнитные волны 278
— — в плазме 272
Этан 319
Эффект Доплера 233, 236, 343
— — Физо 336
— Зеемана 349, 360
— Комптона 302
— Мессбауэра 369
— Штарка 316
Экранирование 366
Юнга полосы 7, 20

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборники задач полезны как для преподавателей, оценивающих знания студентов, так и для самих студентов, использующих задачи в процессе обучения. Настоящий сборник рассчитан на современный уровень знаний студентов, специализирующихся в области оптики; многие задачи предлагались на выпускных экзаменах.

Физическая оптика представляет собой традиционный раздел физики, в котором имеется множество задач. В данной книге мы попытались предоставить студентам широкий выбор задач, основанных на современном материале, с использованием некоторых новых экспериментальных и теоретических результатов, а также тех разделов электромагнитной теории, которые относятся к оптике.

Квантовая оптика, которая включает элементы квантовой механики и ее применение в атомной и молекулярной спектроскопии и, таким образом, в теории распространения электромагнитного излучения в веществе, лишь недавно была введена в курсы оптики. В связи с этим соответствующие задачи составлены на несколько более низком уровне, чем классические, несмотря на их важное значение в современных работах по оптике.

В сборнике сделана попытка найти равновесие между чрезмерной детализацией решений и достаточным количеством полезных подробностей. Если некоторые детали в решении отсутствуют, то указывается основной принцип, используемый при решении задачи.

Авторы весьма признательны своим коллегам, которые помогли им при отборе задач. Это господа Буато, Ферт, Франсон, Жакино, Кахан, Никитин, Руар, Руссе, Серван, Вьено. Решения к задачам составлены авторами, которые, таким образом, несут ответственность за любую ошибку в деталях или за отсутствие необходимых подробностей.

Мы также благодарны проф. Дж. У. Блейкеру за точный перевод с французского языка на английский.

*М. Руссо
Ж. П. Матье*

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Число Авогадро	$N = 6,025 \times 10^{26}$ молекул/кмоль
Объем одного киломоля идеального газа при стандартных условиях	$V_m = 22420$ м ³
Постоянная идеального газа	$R = 8,3169 \times 10^3$ Дж/кмоль · К
Постоянная Больцмана	$k = R/N = 1,380 \times 10^{-23}$ Дж/К
Диэлектрическая постоянная вакуума	$\epsilon_0 = 8,834 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная проницаемость вакуума	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Г/м
Постоянная Фарадея	$F = 96,522 \cdot 10^6$ Кл/кмоль
Заряд электрона	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e = 9,1083 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$M_H = 1,6724 \cdot 10^{-27}$ кг
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1,759 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Постоянная Планка	$h = 6,6252 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Скорость света в вакууме	$c = 2,99793 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Ридберга для водорода	$R_H = 10\,967\,758$ м ⁻¹
Радиус атома водорода в основном состоянии	$r_0 = 0,5292 \cdot 10^{-10}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B = eh/4\pi m_e = 9,27 \cdot 10^{-24}$ А · м ²
Комптоновская длина волны для электрона	$\lambda_c = 2h/m_e c = 4,8524 \cdot 10^{-12}$ м
Связь между энергетическими величинами:	
1 кал = 4,185 Дж	
1 эВ = 1,602 · 10 ⁻¹⁹ Дж = 8068 см ⁻¹ (×hc)	

Эти константы употребляются в данной книге, за исключением особо указанных случаев.

ЗАДАЧА 1

Контрастность полос Юнга

Во всех задачах мы будем полагать, что источник света дает монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм.

I

1. Точечный источник S_0 освещает две узкие параллельные щели F_1 и F_2 , расположенные горизонтально на непрозрачном экране. Расстояние между щелями 2 мм. Интерференционная картина наблюдается в плоскости π , параллельной экрану и удаленной от него на расстояние 1 м. Точке M в плоскости π приписываются координаты X и Y (ось Y параллельна щелям). Получите выражение, характеризующее распределение освещенности в плоскости π .

2. Как изменится картина, если S_0 заменить узкой щелью F_0 , параллельной F_1 и F_2 ? Вычислите положение интерференционных полос.

3. Наблюдение полос производится при помощи окуляра Френеля, подобного тонкой линзе с фокусным расстоянием $f = 2$ см. Каковы преимущества наблюдения при помощи окуляра по сравнению с наблюдением невооруженным глазом? Укажите положения окуляра и глаза по отношению к плоскости π , которые обеспечивают наилучшее наблюдение полос.

II

Пусть щель F_1 покрыта поглощающим экраном (который не вносит фазового сдвига) с оптической плотностью $\Delta = 2$.

Оптическая плотность определяется как

$$\Delta = \lg \frac{\text{Интенсивность падающего света}}{\text{Интенсивность проходящего света}}.$$

Вычислите видность полос V , определяемую как

$$V = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}},$$

где $I_{\text{макс}}$ и $I_{\text{мин}}$ представляют собой максимальную и минимальную интенсивности соответственно.

III

Случай протяженного некогерентного источника.

1. Источник-щель имеет высоту h (фиксированную), ширину a (переменную) и расположен на расстоянии $d = 1$ м от плоскости щелей F_1 и F_2 . Каково при этих условиях выражение для освещенности в точке M на плоскости π ? Найдите изменение видности полос V как функции от a . Используйте это выражение для описания явлений, наблюдаемых в том случае, если постепенно увеличивать ширину a источника-щели F_0 . Определите максимальную ширину щели, при которой потери в контрастности не будут превышать 10%.

2. Для увеличения яркости картины в качестве источника используется некогерентно освещенная решетка (щели параллельны F_1 и F_2). Определите ширину a прозрачных интервалов и величину p периода решетки, при которых видность сохраняет свое предыдущее значение.

IV

1. Предположим, что ширина источника-щели F_0 достаточно мала для того, чтобы он мог рассматриваться как линия, и заменим окуляр Френеля фотоэлементом. Поместим щель фотоэлемента в плоскости π параллельно полосам интерференции. Высота щели фиксирована, ширина изменяется. Будем считать, что интенсивность фототока пропорциональна световому потоку, падающему на фотоэлемент. Сформулируйте закон изменения тока как функции абсциссы X щели. Опишите, что произойдет, если щель открыта.

2. Каково выражение для интенсивности тока в предположении, что источник-щель не бесконечно узок, а имеет конечную ширину a ? Определите коэффициент видности.

V

1. Примем ширину источника-щели a равной 0,01 мм и ширину щели детектора b равной 0,02 мм. Определите видность.

Эта теоретическая видность V_t больше, чем экспериментальная видность V_r , равная 0,5. Покажите, что это можно объяснить, учитывая паразитный (темновой) ток $\mathcal{I}_0$, который определяется в отсутствие светового потока. Рассчитайте отношение $\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_{\text{макс}}$ темнового тока к максимальной интенсивности сигнала.

2. Ширина щели детектора фиксируется при его изготовлении и имеет значение $b = 0,02$ мм, тогда как ширина a источника-щели может быть изменена.

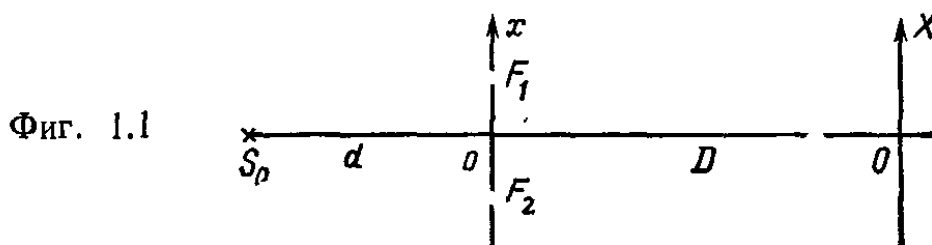
Рассчитайте величину V_r и представьте графически ее изменение как функцию a . При каком значении a величина V_r будет максимальной? Какое заключение можно сделать из этого исследования?

РЕШЕНИЕ

1. Когерентное освещение

1. Точечный источник

Обозначим через x и y координаты точки M в плоскости зрачка и через X и Y — ее координаты в плоскости изображения (фиг. 1.1). Бесконечно узкие щели дают дифракционную картину в плоскости XOY .



Только линия OX освещается светом с распределением интенсивности

$$I = 4 \cos^2(\pi u s), \quad (1)$$

где

$$u = \frac{\sin i}{\lambda} \approx \frac{i}{\lambda} = \frac{X}{D} \frac{1}{\lambda}. \quad (2)$$

Этот результат основан на том факте, что в случае когерентного освещения щелей распределение амплитуды в плоскости изображения описывается преобразованием Фурье (Ф.Т.) для амплитудного распределения в зрачке (см. приложение А).

Амплитуда в выходном зрачке равна

$$f(x) = \delta\left(x + \frac{s}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{s}{2}\right). \quad (2)$$

Амплитуда в плоскости изображения равна

$$F(u) = \text{Ф. Т. } [f(x)], \quad (4)$$

$$F(u) = \Delta(u) [e^{i\pi u s} + e^{-i\pi u s}], \quad (5)$$

где

$$\Delta(u) = \text{Ф. Т. } [\delta(x)] = 1, \quad (6)$$

откуда

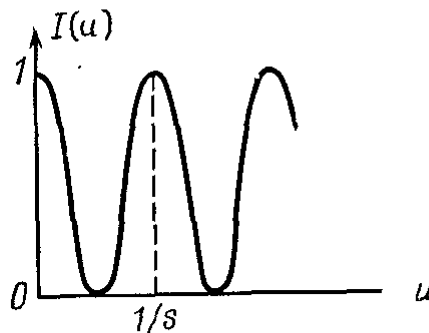
$$F(u) = 2 \cos \pi u s \rightarrow \text{период } 2/s \quad (7)$$

и

$$I(u) = |F(u)|^2 = 4 \cos^2 \pi u s \rightarrow \text{период } 1/s. \quad (8)$$

2. Линейный источник

В этом случае вдоль линий, параллельных OY , интерференции не наблюдается. Каждая точка в источнике-щели дает распределение света вдоль OX с центром на ее геометрическом изображении. При этом появляются полосы, параллельные F_1 и F_2 .



Фиг. 1.2

Период этих полос таков, что

$$\Delta u = \frac{1}{s}, \quad (9)$$

откуда следует линейная зависимость для интервалов между полосами (фиг. 1.2):

$$\Delta X = \lambda \frac{D}{s}. \quad (10)$$

Численный пример:

$$\Delta X = 0,55 \cdot \frac{10^{-3}}{2} = 0,275 \text{ мм.}$$

3. Наблюдение полос

Невооруженный глаз. Нормальный глаз, рассматривающий предмет на расстоянии наилучшего зрения (25 см), с трудом различает полосы изображения. В действительности расстояние между полосами видно под углом

$$\epsilon = \frac{0,275}{250} \approx 10^{-3} \text{ рад.}$$

Это значение лишь немного превышает угловой предел разрешения глаза, который имеет величину порядка 1 мин, или $3 \cdot 10^{-4}$ рад.

Окуляр + глаз. Во избежание усталости предпочтительнее, чтобы глаз не подвергался аккомодации. Поэтому используют окуляр, фокальная плоскость которого совпадает с плоскостью л. В этом случае изображение образуется на бесконечности. Это изображение легко разрешимо, так как угловое расстояние между полосами становится равным

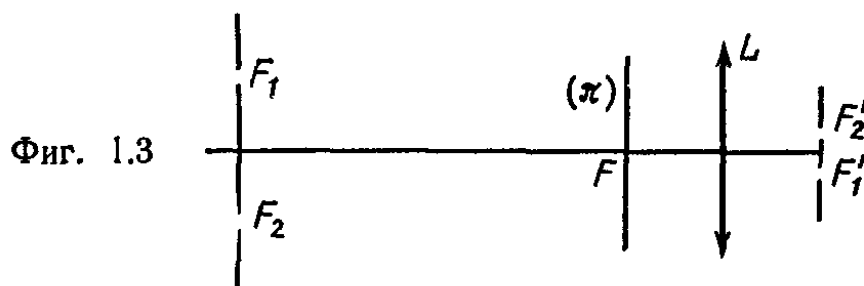
$$\varepsilon = \frac{0,275}{20} = 0,0135 \text{ рад.}$$

Увеличение окуляра

$$G = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon},$$

где ε' — угол, под которым наблюдается изображение, ε — угол, под которым наблюдается объект с расстояния наилучшего зрения.

Примечание. В принципе щели, расположенные параллельно, дают такую дифракционную картину, что даже окуляр



Фиг. 1.3

с большой апертурой не может сколлимировать все лучи. Чтобы получить максимум света, наблюдатель должен поместить свой зрачок в плоскости щелей F_1' и F_2' , сопряженной с плоскостью щелей F_1 и F_2 (фиг. 1.3).

Щели расположены на расстоянии ξ от линзы, а их изображения на расстоянии ξ' , так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi'} - \frac{1}{\xi} &= \frac{1}{f}, \\ \frac{1}{\xi'} &= \frac{1}{100 + f} + \frac{1}{f} = \frac{52}{102}, \\ \xi' &= 1,965 \text{ см} \approx 2 \text{ см.} \end{aligned}$$

Увеличение равно

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\xi'}{\xi} = \frac{1}{52}.$$

Изображение имеет размер

$$\eta' = \frac{\eta}{52} = \frac{2}{52} \approx 0,04 \text{ мм.}$$

Все лучи, которые входят в окуляр, попадут в глаз, так как величина η' меньше, чем минимальный диаметр зрачка глаза.

II. Колебания, проходящие через F_1 и F_2 , находятся в фазе, но имеют разные амплитуды

Если колебания имеют разность фаз φ , то интенсивность в точке M дается выражением

$$I(M) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \varphi. \quad (11)$$

Максимальная и минимальная интенсивности соответственно определяются как

$$I_{\text{макс}} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

и

$$I_{\text{мин}} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2.$$

Видность равна

$$V = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2}. \quad (12)$$

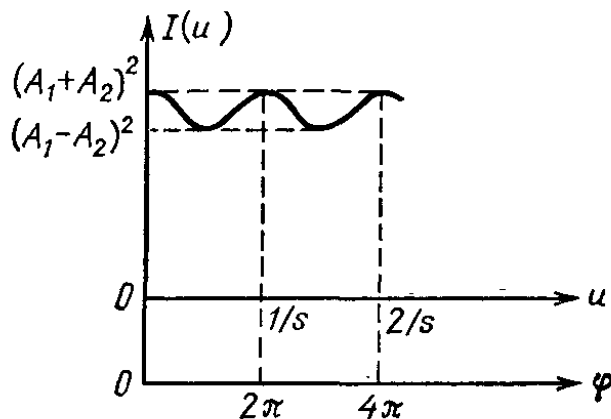
Предполагая, что фильтр с определенной оптической плотностью помещается перед F_1 , имеем

$$\lg \frac{I_2}{I_1} = 2, \quad \text{где} \quad \frac{I_2}{I_1} = 100,$$

откуда (фиг. 1.4)

$$V = 0,2.$$

Положения максимумов и минимумов с фильтром и без



Фиг. 1.4

фильтра одинаковы. С другой стороны, величина V отлична от единицы, если амплитуды, проходящие сквозь щели, не равны.

III. Протяженный источник. Некогерентное освещение

1. Источником является большая щель

Все точки на линии, параллельной OY , образуют полосы, параллельные оси OY с периодом $\Delta u = 1/s$. Разобьем щель (шириной a) на бесконечное число бесконечно узких щелей.

Пусть v — приведенная координата некоторой точки в плоскости источника. Ширина щели может быть охарактеризована величиной

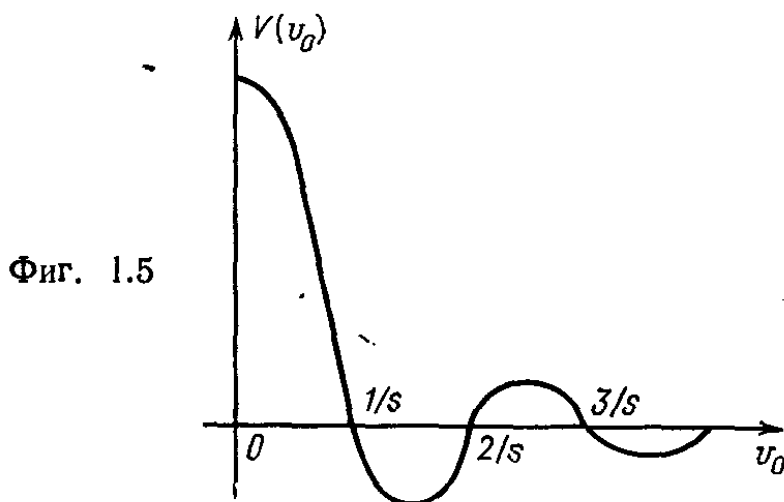
$$v_0 = \frac{a}{\lambda d}. \quad (13)$$

Интенсивность, создаваемая в точке M элементом шириной dv , равна

$$dI = A \times h \{1 + \cos 2\pi [(u + v) s]\} dv. \quad (14)$$

Здесь A — константа, $\lambda v s$ — разность хода между световыми возмущениями, поступающими от F_1 и F_2 .

Каждая элементарная щель бесконечно малой ширины образует систему полос с периодом $\Delta u = 1/s$ и с максимумами на геометрическом изображении элементарной щели.



Таким образом, интенсивность освещения точки M от источника-щели равна

$$I = Ah \int_{-v_0/2}^{+v_0/2} [1 + \cos 2\pi (u + v) s] dv, \quad (15)$$

$$I = I_0 \left[1 + \frac{\sin \pi v_0 s}{\pi v_0 s} \cos 2\pi u s \right]. \quad (16)$$

Находим

$$V = \frac{\sin \pi v_0 s}{\pi v_0 s}.$$

График функции V приведен на фиг. 1.5.

Численный пример. Пусть $V \geq 0,9$, так что

$$\frac{\sin \pi v_0 s}{\pi v_0 s} = 0,9 \rightarrow \pi v_0 s = \frac{\pi}{4} \rightarrow v_0 = \frac{1}{4s}.$$

Из определения v_0 получаем

$$\frac{1}{4s} = \frac{a}{\lambda d},$$

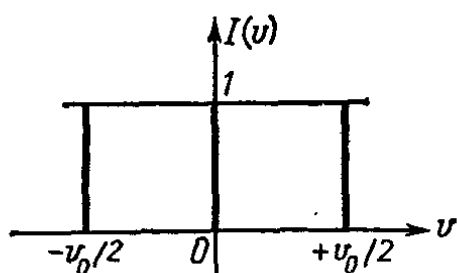
так что

$$a = d \frac{\lambda}{4s} = 10^6 \cdot \frac{0,55 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 2},$$

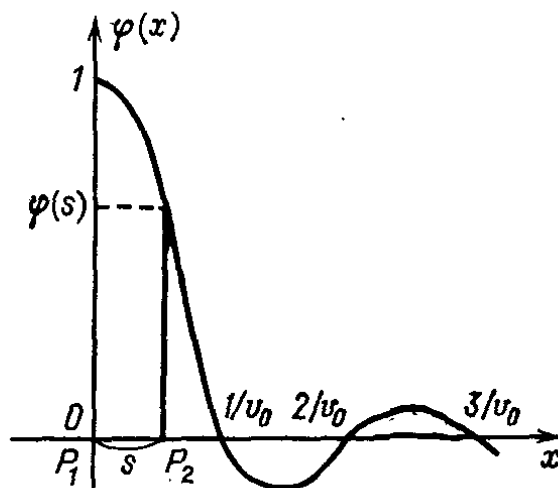
$$V = 0,9 \quad \text{при} \quad a \approx 70 \text{ мкм.}$$

Полосы исчезают при $a = 275 \text{ мкм}$.

Теорема Ван-Циттерта — Цернике (приложение Б) позволяет сразу получить этот результат. Степень когерентности между щелями F_1 и F_2 дается преобразованием Фурье для распределения интенсивности в плоскости источника. Поскольку задача одномерна, достаточно предположить, что источником является щель шириной a , параллельная OY , и что зрачок образуется двумя точками P_1 и P_2 на непрозрачном экране (точки P_1 и P_2 , соответствующие пересечению щелей F_1 и F_2 с линией



Фиг. 1.6



Фиг. 1.7

ох, разделены промежутком s). Распределение интенсивности источника может быть представлено прямоугольной функцией (фиг. 1.6):

$$\begin{aligned} I(v) &= 0 \quad \text{для} \quad v < -v_0/2 \quad \text{и} \quad v > +v_0/2, \\ I(v) &= 1 \quad \text{для} \quad -v_0/2 < v < +v_0/2. \end{aligned} \quad (17)$$

Находим (фиг. 1.7)

$$\text{Ф. Т. } [I(v)] = \varphi(x) = \frac{\sin \pi v_0 x}{\pi v_0 x}. \quad (18)$$

Мысленно поместим каждое дифракционное пятно на зрачок так, чтобы его центр совпал с точкой P_1 . Видность полос равна значению $\varphi(x)$ в точке P_2 , т. е. значению $\varphi(s)$ (фиг. 1.7). Видно, что контрастность полос еще хорошо сохраняется при $s = 1/4 v_0$.

2. Источником является некогерентно освещенная решетка

Обозначим через v_p приведенную координату, соответствующую периоду решетки p .

а) Предположим, что освещенные штрихи являются бесконечно тонкими.

Распределение интенсивности в источнике описывается разложением в ряд Дирака (фиг. 1.8). Его преобразованием Фурье будет разложение в ряд Дирака с периодом $1/v_p$ (фиг. 1.9).

Как и прежде, мысленно поместим дифракционное пятно $\varphi(x)$ на зрачок, так что $\varphi(0)$ совпадает с точкой P_1 . Видность полос будет равна единице, если

$$\frac{1}{v_p} = s,$$

т. е. если

$$s = \frac{\lambda d}{p},$$

так что

$$p = \frac{\lambda d}{s} = 0,55 \cdot \frac{10^3}{2} = 275 \text{ мкм.}$$

б) Пусть ширина штриха решетки имеет конечную величину a . Функция $I(v)$ представляет собой разложение в бесконечный ряд прямоугольных функций (фиг. 1.10) с периодом v_p и шириной v_0 .

Преобразование Фурье показано на фиг. 1.11.

Для хорошей контрастности изображения необходимо, чтобы

$$s = \frac{1}{v_p} = \frac{1}{4v_0}.$$

Численный пример

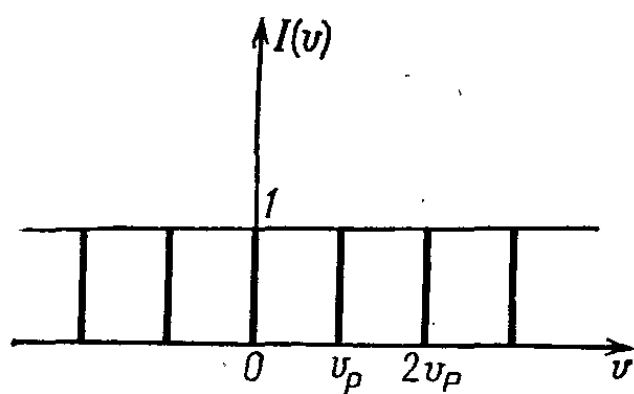
Период решетки $p = 275 \text{ мкм.}$

Ширина штриха решетки $a = 70 \text{ мкм.}$

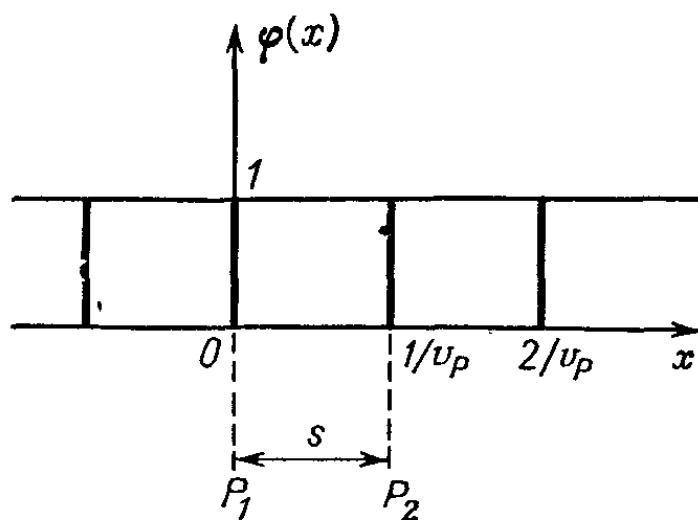
Примечание. Эти результаты можно получить также другим простым путем (фиг. 1.12).

а) Решетки с бесконечно тонкими штрихами. Полосы остаются фиксированными, если колебания, прошедшие через штрих решетки T , сдвинуты по фазе в точках P_1 и P_2 на величину $2\pi k$ (k — целое число).

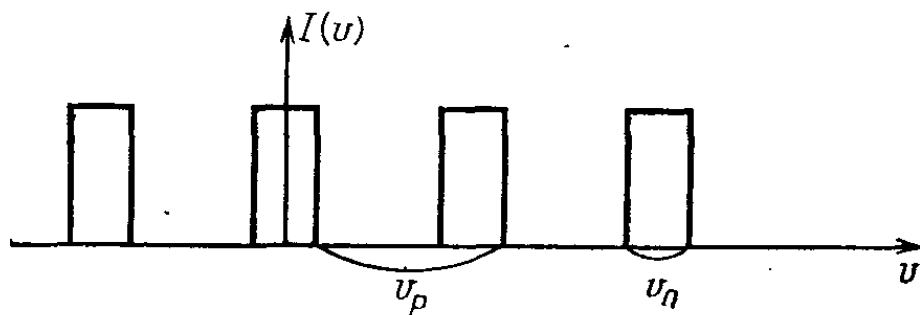
б) Решетки со штрихами, имеющими конечную ширину a . Чтобы полосы не перекрывались, колебания, прошедшие от краев штриха, должны иметь в точках P_1 и P_2 разность хода в интервале между $k\lambda$ и $(k + 1/8)\lambda$ (полосы, создаваемые внешними краями штриха, сдвинуты максимально на $1/4$ полосы).



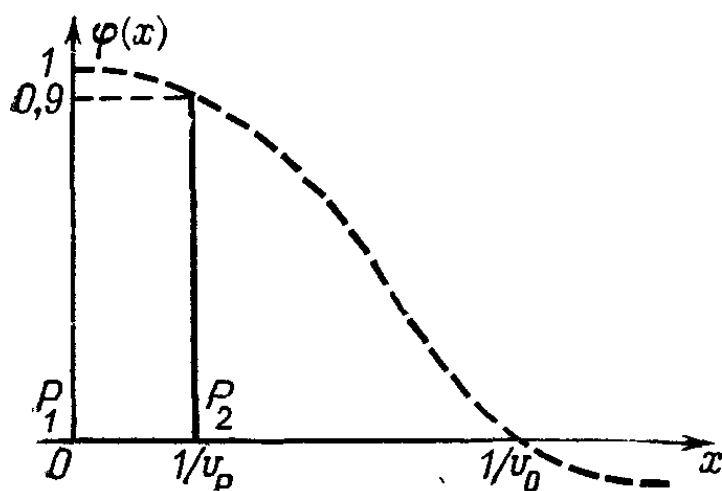
Фиг. 1.8



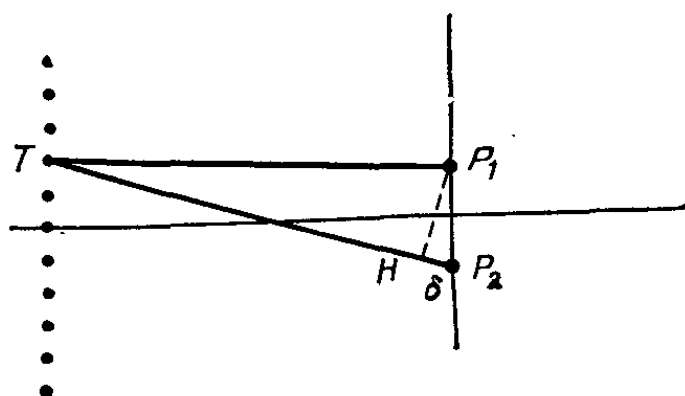
Фиг. 1.9



Фиг. 1.10



Фиг. 1.11



Фиг. 1.12

IV. Отверстие детектора имеет конечную ширину b

1. Источник — бесконечно узкая щель

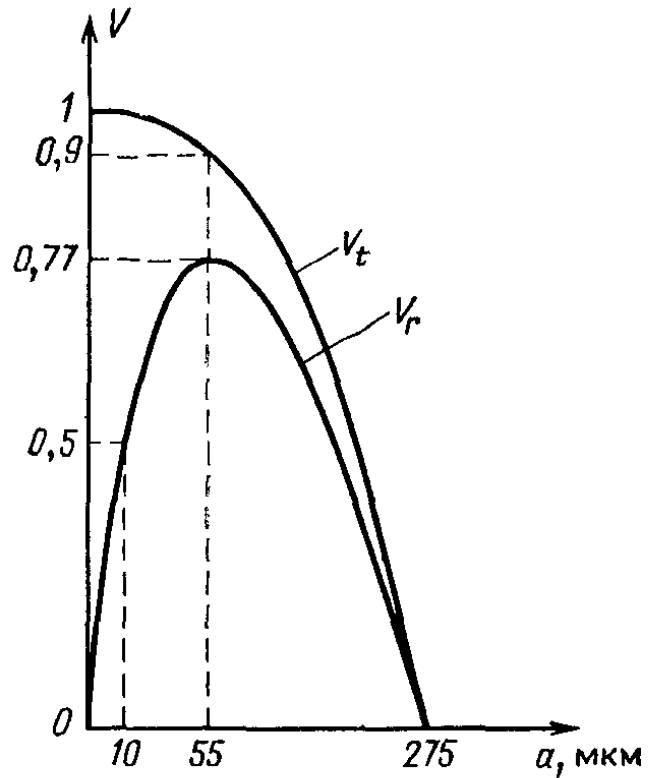
Полосы на плоскости π (см. решение I.1) имеют контрастность, равную единице. С другой стороны, вследствие конечной ширины щели детектора поток, регистрируемый приемником, всегда отличен от нуля (фиг. 1.13). Освещенность одинакова во всех точках единственной вертикали в плоскости наблюдения. Разделим окно приемного фотоэлемента на элементы шириной du и высотой l .

Обозначим через u_c приведенную координату, которая соответствует линейной ширине щели b . Поток, проникающий через элемент поверхности при значении абсциссы u' , равен

$$d\Phi = Bl (1 + \cos 2\pi u s) du, \quad (19)$$

откуда

$$\begin{aligned} \Phi(u') &= \int_{u' - u_c/2}^{u' + u_c/2} d\Phi = Blu_c \times \\ &\times \left[1 + \frac{\sin \pi u_c s}{\pi u_c s} \cos 2\pi u' s \right]. \end{aligned} \quad (20)$$



Фиг. 1.13

Как и прежде, можно определить коэффициент видности выражением

$$V = \frac{\sin \pi u_c s}{\pi u_c s}. \quad (21)$$

Пока u_c меньше $1/4s$, интенсивность фототока, пропорциональная световому потоку, изменяется синусоидально. Если открыть щель, то разница между максимумами и минимумами уменьшается. Наконец, при $u_c = 1/s$ интенсивность фототока остается постоянной независимо от расположения фотоэлемента.

2. Источник-щель конечной ширины a

Имеем

$$I(u) = I_0 \left(1 + \frac{\sin \pi v_0 s}{\pi v_0 s} \cos 2\pi u s \right), \quad (22)$$

откуда

$$\Phi(u') = Blv_0 \int_{u'-u_c/2}^{u'+u_c/2} \left[1 + \frac{\sin \pi v_0 s}{\pi v_0 s} \cos 2\pi u s \right] du, \quad (23)$$

$$\Phi(u') = Blu_c v_0 \left[1 + \frac{\sin \pi u_c s}{\pi u_c s} \cdot \frac{\sin \pi v_0 s}{\pi v_0 s} \cos 2\pi u' s \right]. \quad (24)$$

Находим, что

$$V = \frac{\sin \pi u_c s}{\pi u_c s} \cdot \frac{\sin \pi v_0 s}{\pi v_0 s}. \quad (25)$$

Видность может быть определена с помощью «аппаратной функции».

$$V = \text{Ф. Т. (источник-щель, ширина } v_0) \times \\ \times \text{Ф. Т. (апертура фотоэлемента, ширина } u_c)$$

В случае бесконечно малой ширины источника-щели первый член в произведении уменьшается до единицы, так как Ф. Т. $[\delta(x)] = 1$.

V. Влияние темнового тока

Вернемся к уравнению (25), которое дает теоретическое значение видности

1. $a = 0,01$ мм, $b = 0,02$ мм ($v_0 = \text{const}$, $u_c = \text{const}$). Имеем

$$V_t = 0,991 \cdot \frac{\sin \pi v_0 s}{\pi v_0 s} = 0,987.$$

Учитывая темновой ток, для интенсивности реального тока получаем

$$\mathcal{I}_r(u) = \mathcal{I}(u) + \mathcal{I}_0. \quad (26)$$

Отсюда экспериментальная видность

$$V_r = \frac{\mathcal{I}_{r \text{ макс}} - \mathcal{I}_{r \text{ мин}}}{\mathcal{I}_{r \text{ макс}} + \mathcal{I}_{r \text{ мин}}} = \frac{\mathcal{I}_{\text{макс}} - \mathcal{I}_{\text{мин}}}{\mathcal{I}_{\text{макс}} + \mathcal{I}_{\text{мин}} + 2\mathcal{I}_0}, \quad (27)$$

$$V_r = \frac{(\sin \pi u_c s / \pi u_c s) \cdot (\sin \pi v_0 s / \pi v_0 s)}{1 + \mathcal{I}_0 / v_0}. \quad (28)$$

(Постоянный коэффициент Blu_c мы приняли равным единице.)
Отсюда получаем соотношение

$$V_r = \frac{V_t}{1 + \mathcal{I}_0 / v_0}. \quad (29)$$

Численный пример

$$1 + \frac{\mathcal{I}_0}{v_0} = \frac{V_t}{V_r} = \frac{0,987}{0,5} = 1,974,$$

$$\frac{\mathcal{I}_0}{v_0} = 0,974.$$

Имеем

$$\mathcal{I}_{\text{макс}} = v_0 [1 + V_t] = v_0 [1,987],$$

откуда

$$\frac{\mathcal{I}_0}{\mathcal{I}_{\text{макс}}} = \frac{0,974}{1,987} \approx \frac{1}{2}$$

(на практике это значение много меньше).

2. a — переменная величина, $b = 0,02$ мм (v_0 — переменная, $u_c = \text{const}$). Имеем

$$V_t = 0,991 \frac{\sin \pi v_0 s}{\pi v_0 s}, \quad (30)$$

откуда

$$V_r = \frac{0,991 (\sin \pi v_0 s / \pi v_0 s)}{1 + \mathcal{I}_0 / v_0} = 0,991 \cdot \pi s \frac{\sin \pi v_0 s}{\pi s (v_0 + \mathcal{I}_0)}.$$

Величина V_r имеет максимум при $dV_r/dV_0 = 0$, так что

$$\text{tg } \pi v_0 s = \pi v_0 s + \pi s \mathcal{I}_0 = \pi v_0 s + 0,111.$$

Это уравнение удовлетворяется при $\pi v_0 s \approx 35^\circ$.

$$v_0 \approx \frac{36}{180} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^3} = 10^{-4} \text{ мкм}^{-1}, \quad \text{так как } v_0 = \frac{a}{\lambda_f},$$

следовательно,

$$a = v_0 f \lambda = 10^{-4} \cdot 10^6 \cdot 0,55,$$

$$a = 0,55 \text{ мкм}.$$

Зависимости V_t и V_r от v_0 представлены на фиг. 1.13. Для $a = 55$ мкм имеем

$$V_t = 0,991 \cdot \frac{\sin 35^\circ}{(3,14 \cdot 36)/180} = 0,89.$$

Следовательно,

$$V_r = \frac{V_t}{1 + \mathcal{I}_0 / v_0} = \frac{0,9}{1 + 0,974 \cdot 10/55} = \frac{0,9}{1,1771}.$$

Заключение. Теоретически для получения наибольшей контрастности желательно закрыть источник-щель до наименьшей возможной ширины. Практически при наличии темнового тока необходимо иметь некоторую оптимальную ширину источника-щели.

ЗАДАЧА 2

Опыт Юнга. Ахроматические полосы

I

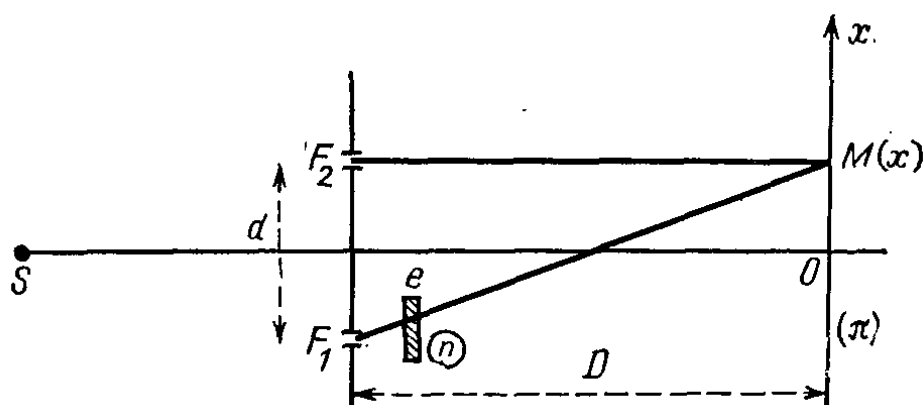
Монохроматический источник ($\lambda = 0,55$ мкм).

Установка Юнга, показанная на фиг. 2.1, имеет следующие характеристики:

Расстояние между щелями $a = 3,3$ мм.

Расстояние от зрчка до экрана $D = 3$ м.

1. Рассчитайте расстояние между полосами i .
2. Поместите стеклянную пластинку толщиной $e = 0,01$ мм с плоскопараллельными гранями перед щелью F_1 .



Фиг. 2.1

а) Определите направление смещения полос и выведите формулу для величины их смещения.

б) Зная, что полосы смещены на 4,73 мм, найдите показатель преломления стекла. Насколько точно это значение n , если смещение может быть измерено с точностью до 0,01 мм?

II

Полосы в белом свете.

Дисперсия стекла определяется выражением

$$n = n_0 + \frac{A}{\lambda^2} \quad \text{при} \quad \begin{cases} n_0 = 1,50, \\ A = 0,00605 \quad \text{для } \lambda \text{ в мкм.} \end{cases}$$

Выразите x как функцию порядка интерференции и длины волны.

Получите зависимость $x = f(\lambda)$ для $p = \delta/\lambda = 1, 0, -1, -2$.

1. Какова цветовая структура полосы нулевого порядка?

2. Покажите, что существует яркая полоса, для которой x имеет постоянное значение (λ лежит между 0,4 и 0,75 мкм). Каков порядок интерференции этой ахроматической полосы?

РЕШЕНИЕ

1. Монохроматический источник

1. Интервалы между полосами

$$i = \lambda \frac{D}{a} = 0,55 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{3,3} = 0,5 \text{ мм.}$$

2. а) Смещение полос Δx

Разность хода для лучей, интерферирующих в точке M , равна:
без стекла

$$\delta_1 = F_1 M - F_2 M = x \frac{\lambda}{i}, \quad (1)$$

после введения стекла

$$\delta = x \frac{\lambda}{i} + (n - 1)e. \quad (2)$$

Полоса порядка p , имевшая абсциссу $x_1 = pi$, имеет новую абсциссу

$$x = \frac{i}{\lambda} [p\lambda - (n - 1)e]. \quad (3)$$

Система полос смещена в направлении отрицательных значений x на величину

$$\Delta x = -\frac{i}{\lambda} (n - 1)e. \quad (4)$$

б) Измерение показателя преломления

Из уравнения (4) получаем

$$n = 1 - \frac{\lambda}{i} \frac{\Delta x}{e}. \quad (5)$$

В данном случае $x = -4,73$ мм; таким образом,

$$n = 1 + \frac{0,55 \cdot 10^{-3}}{0,5} \cdot \frac{4,73}{10^{-2}}.$$

$$n = 1,5203.$$

Определение ошибки:

$$\frac{d(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{d(n)}{n-1} \quad \text{с} \quad d(\Delta x) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ мм,}$$

$$d(n) = 0,5 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4,73} \approx 2 \cdot 10^{-3},$$

$$n = 1,520 \pm 0,002.$$

II. Полосы в белом свете

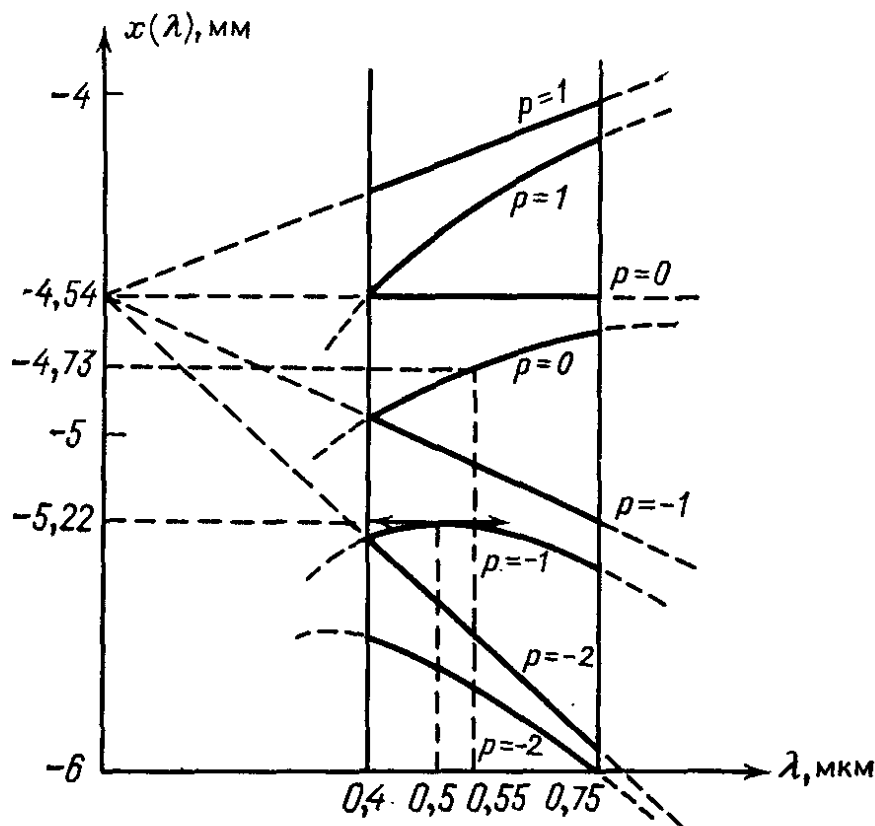
Заменяя в уравнении (3) i на $\lambda D/d$ и $n-1$ на

$$0,50 + \frac{A}{\lambda^2} = 0,50 + \frac{0,00605}{\lambda^2},$$

получаем

$$x(p, \lambda) = -4,545 + 0,909p\lambda - \frac{0,055}{\lambda^2}, \quad (6)$$

где x измеряется в миллиметрах, если λ — в мкм.



Фиг. 2.2

1. $p = 0$. Обнаруживаем цветную полосу (фиг. 2.2). Если сканировать в направлении $x < 0$, то появляются следующие оттенки:

красный	при $x = -4,64$ мм,
желто-зеленый	при $x = -4,73$ мм,
голубой	при $x = -4,89$ мм.

2. $p = -1$. Спектр изгибается назад (фиг. 2.2).

Находим $dx/d\lambda = 0$ для λ вблизи 0,5 мкм.

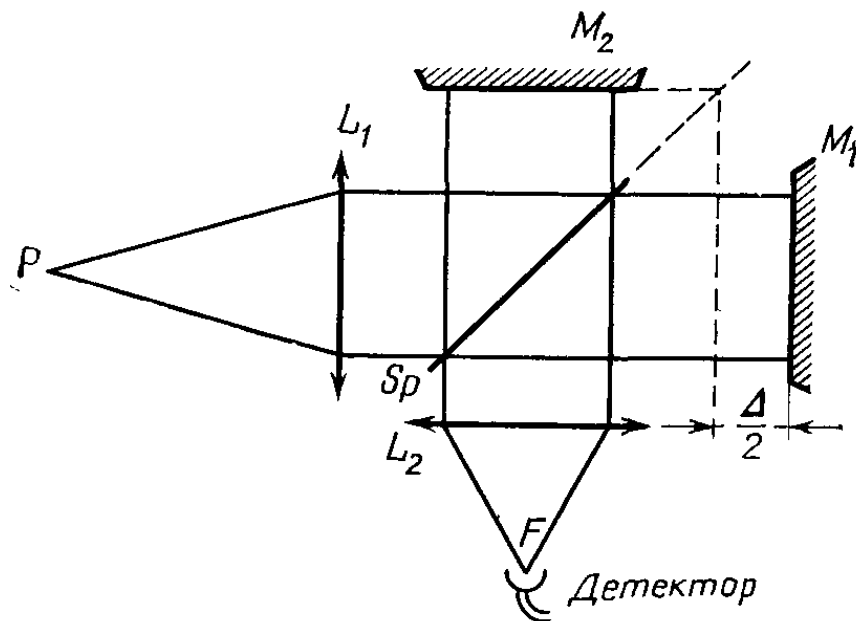
Ахроматическая полоса размыта вблизи значения $x = -5,22$ мм.

Примечание. На фиг. 2.2 изображена группа линий согласно уравнению $x = -4,545 + 0,909p\lambda$, которое соответствует полосам, возникающим при введении недисперсного стекла с показателем преломления $n_0 = 1,50$.

ЗАДАЧА 3

Фурье-спектроскопия

Мы хотим определить спектральное распределение яркости $B(\sigma)$ источника. Для этого интерферометр Майкельсона используется как модулятор (фиг. 3.1).



Фиг. 3.1

Точечный источник P помещается в фокусе коллиматора L_1 . Одно из зеркал строго параллельно изображению другого, образованному делителем пучка S_p . Зеркало M_1 движется с постоянной скоростью, начиная с положения, соответствующего нулевой разности хода.

1. Считается, что путь зеркала неограничен

1. Обозначив через Δ разность хода от двух зеркал, рассчитайте интенсивность света, попадающего на фотоэлемент R (помещенный в фокусе линзы L_2):

- а) для монохроматического источника (σ_0),
- б) для случая, когда спектр содержит σ_1 и σ_2 .

2. Выражение для интенсивности можно представить в виде суммы постоянного члена (средняя интенсивность) и члена, зависящего от Δ . Эти два члена, умноженные на 2, образуют *интерферограмму* $I(\Delta)$.

Покажите, что функции $B(\sigma)$ и $I(\Delta)$ могут быть получены одна из другой при помощи преобразования Фурье. Для упрощения этих расчетов полезно искусственно ввести спектр $B(-\sigma)$, состоящий из отрицательных частот и симметричный спектру $B(\sigma)$. Затем можно использовать следующее свойство: фурье-преобразование четной функции есть четная функция. Во всех этих задачах функции нормируются.

Приложение. Опишите и вычислите интерферограмму для следующих случаев:

α) Источник испускает монохроматическое излучение $B(\sigma_0) = \delta(\sigma - \sigma_0)$.

β) Луч является дублетом: $B(\sigma) = \alpha_1 \cdot \delta(\sigma - \sigma_1) + \alpha_2 \cdot \delta(\sigma - \sigma_2)$ (α_1 и α_2 — постоянные, меньшие единицы).

γ) Луч имеет гауссову форму

$$B(\sigma) = \exp \left[-\pi \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{d\sigma} \right)^2 \right].$$

II. Движение зеркала ограничено. Разрешающая сила

Величина Δ может изменяться только между нулем и максимальным значением L . Спектральное распределение, которое получается, если в прибор поступает строго монохроматическое излучение с волновым числом σ_0 , спектроскописты называют «инструментальным контуром». Исходя из интерферограммы, ограниченной величинами $\Delta = 0$ и $\Delta = L$, получите инструментальный контур и представьте его графически.

РЕШЕНИЕ

Лучи падают нормально к поверхностям зеркал.

Для излучения с волновым числом σ две плоские интерферирующие волны имеют разность фаз

$$\varphi = 2\pi\sigma\Delta. \quad (1)$$

В L_2 происходит интерференция, которая регистрируется в F .

I. Рассмотрим идеальный случай, когда движение зеркала M_1 не ограничено

1. Пусть I_t будет суммарной интенсивностью, полученной в R .

а) Монохроматический источник

$$I_t = B(\sigma_0) \cos^2 \pi\sigma_0\Delta = \frac{B(\sigma_0)}{2} (1 + \cos 2\pi\sigma_0\Delta). \quad (2)$$

б) Полихроматический источник

Вклад в интенсивность излучения от каждой длины волны в интервале $d\sigma$ равен

$$dI_t = B(\sigma) \cos^2 \pi \sigma \Delta d\sigma,$$

следовательно,

$$I_t = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{B(\sigma)}{2} [1 + \cos 2\pi \sigma \Delta] d\sigma. \quad (3)$$

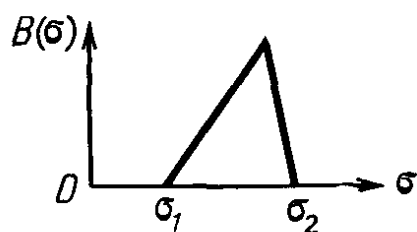
2. Таким образом, интерферограмма имеет вид

$$I(\Delta) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} B(\sigma) \cos 2\pi \sigma \Delta d\sigma.$$

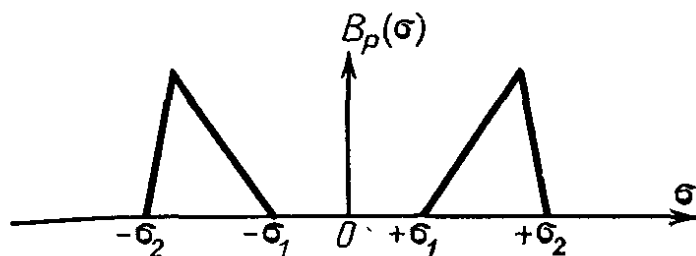
Имеются только положительные частоты, поэтому

$$I(\Delta) = \int_0^{\infty} B(\sigma) \cos 2\pi \sigma \Delta d\sigma. \quad (4)$$

В качестве примера на фиг. 3.2 приведена функция $B(\sigma)$. Построим искусственный спектр $B(-\sigma)$, симметричный предыду-



Фиг. 3.2



Фиг. 3.3

щему, в области отрицательных частот. Если $B_p(\sigma)$ — четная часть функции $B(\sigma)$, то можно написать (фиг. 3.3)

$$B_p(\sigma) = \frac{1}{2} [B(\sigma) + B(-\sigma)]. \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) может быть представлено в виде

$$I(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma) \cos 2\pi \sigma \Delta d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma) e^{i2\pi \sigma \Delta} d\sigma. \quad (6)$$

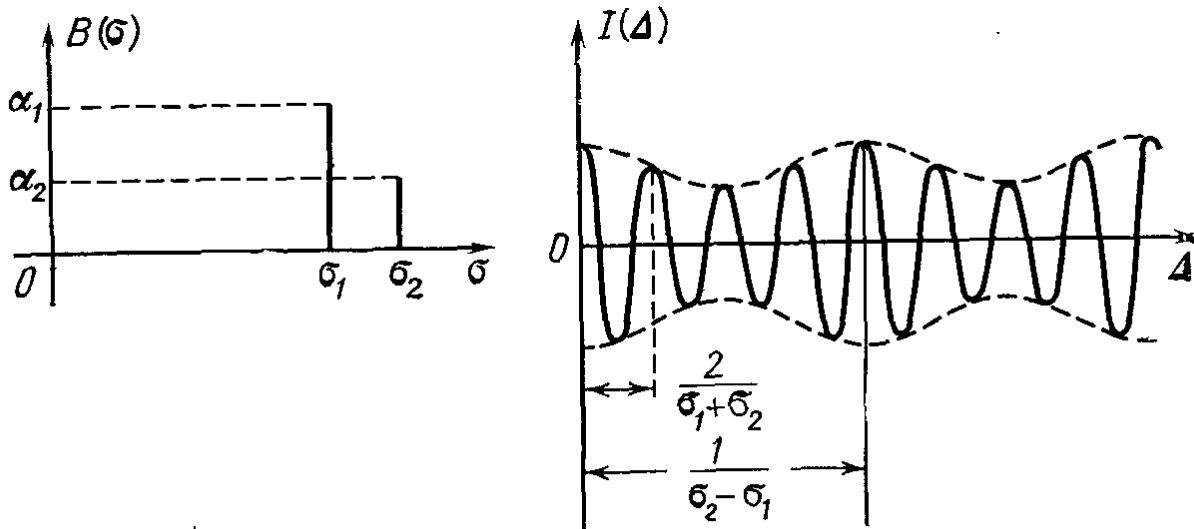
Если интерферограмма точно известна для величины Δ , изменяющейся между 0 и ∞ (в действительности между $-\infty$ и $+\infty$, так как она симметрична), то спектр может быть

построен при помощи преобразования Фурье:

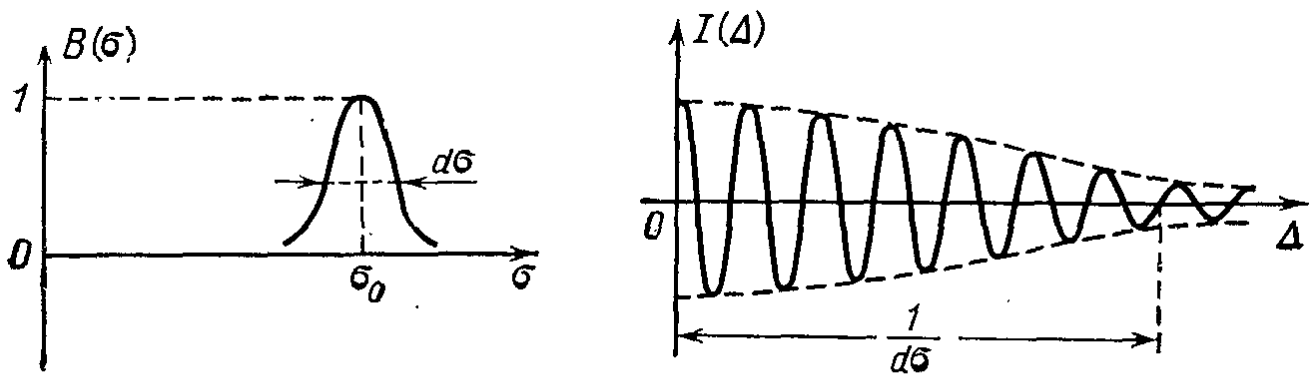
$$B_p(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\Delta) \cos 2\pi\sigma\Delta d\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\Delta) e^{-j2\pi\sigma\Delta} d\Delta, \quad (7)$$

$$B_p(\sigma) \xrightarrow{\text{F. T.}} I(\Delta).$$

Примеры (см. приложение А относительно преобразования Фурье). Если известна функция $B(\sigma)$, то можно получить



Фиг. 3.4



Фиг. 3.5

$B_p(\sigma)$, а отсюда и интерферограмму с помощью преобразования Фурье (фиг. 3.4).

а) $B(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0),$

$$B_p(\sigma) = \delta(\sigma + \sigma_0) + \delta(\sigma - \sigma_0) \rightarrow I(\Delta) = \cos 2\pi\sigma_0\Delta;$$

б) $B(\sigma) = \alpha_1\delta(\sigma - \sigma_1) + \alpha_2\delta(\sigma - \sigma_2) \rightarrow$

$$\rightarrow I(\Delta) = \alpha_1 \cos 2\pi\sigma_1\Delta + \alpha_2 \cos 2\pi\sigma_2\Delta.$$

В специальном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2$, минимумы огибающей равны нулю.

в) $B(\sigma) = \exp\left[-\pi\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{d\sigma}\right)^2\right] = \delta(\sigma - \sigma_0) \otimes \exp\left[-\pi\left(\frac{\sigma}{d\sigma}\right)^2\right].$

Применяя теорему свертки (приложение А), получаем

$$I(\Delta) = \cos 2\pi\sigma_0\Delta \cdot e^{-\pi(d\sigma\cdot\Delta)^2}.$$

Огибающая имеет ширину $1/d\sigma$ (фиг. 3.5).

II. Разрешающая сила

1. Ограниченная интерферограмма ($0 < \Delta_0 < L$)

Эта интерферограмма может быть представлена функцией $I'(\Delta)$:

$$I'(\Delta) = I(\Delta) \cdot F(\Delta), \quad (8)$$

где

$$F(\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{для } -L < \Delta < +L, \\ 0 & \text{для } \Delta < -L \text{ и } \Delta > L. \end{cases} \quad (9)$$

Используя теорему Парсеваля, можно написать

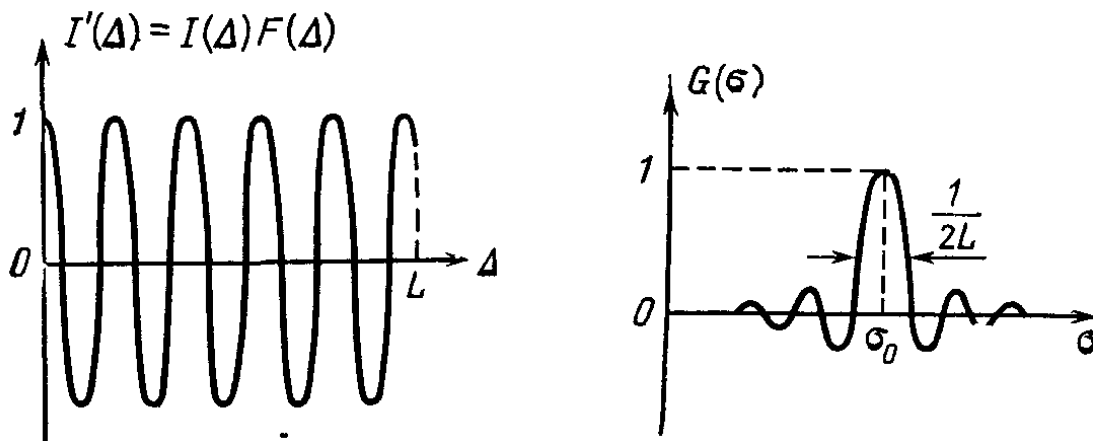
$$G_p(\sigma) = \text{F. T. } [I'(\Delta_0)] = \text{F. T. } [I(\Delta_0)] \otimes \text{F. T. } [F(\Delta_0)]. \quad (10)$$

Преобразование Фурье для щелевой функции имеет вид

$$\text{F. T. } [F(\Delta)] = \frac{\sin 2\pi\sigma L}{2\pi\sigma L}, \quad (11)$$

следовательно,

$$G_p(\sigma) = \frac{\sin 2\pi(\sigma - \sigma_0)L}{2\pi(\sigma - \sigma_0)L} + \frac{\sin 2\pi(\sigma + \sigma_0)L}{2\pi(\sigma + \sigma_0)L}. \quad (12)$$



Фиг. 3.6

Инструментальный контур приведен на фиг. 3.6.

$$G(\sigma) = \frac{\sin 2\pi(\sigma - \sigma_0)L}{2\pi(\sigma - \sigma_0)L}; \quad (13)$$

здесь $G(\sigma)$ — спектр, полученный от строго монохроматического источника излучения; он имеет ширину $\Delta\sigma = 1/2L$. Тогда

разрешающая сила для излучения σ_0 описывается выражением

$$R = \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} = \sigma_0 \cdot 2L = \frac{2L}{\lambda_0} = 2N.$$

Таким образом, разрешающая сила пропорциональна числу зарегистрированных полос N .

Численный пример:

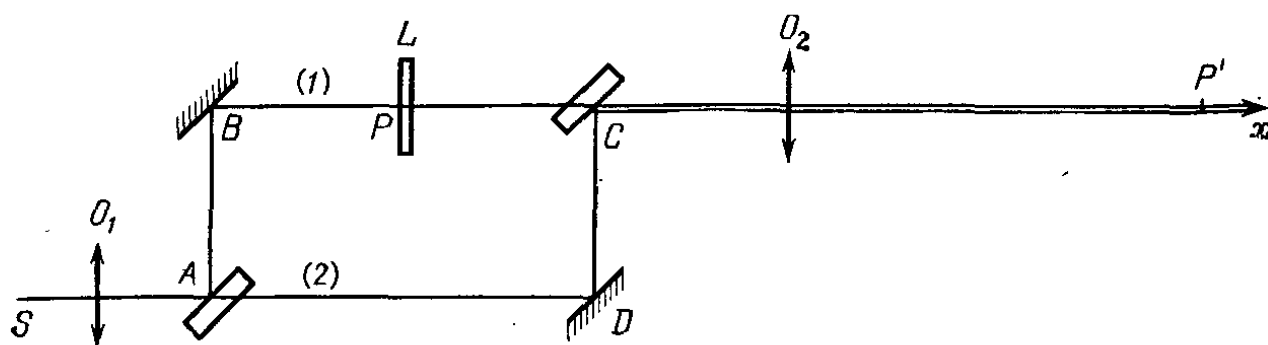
$$L = 10^3, \quad \lambda = 0,5 \text{ мкм},$$

$$R = \frac{2 \cdot 10^3}{0,5} = 4000.$$

ЗАДАЧА 4

Интерферометр Маха

В этом случае изучается интерференция отдельных лучей, как показано на фиг. 4.1.



Фиг. 4.1

Пусть B и D — два зеркала с отражательной способностью, равной единице; A и C — два идентичных делителя лучей, расположенных, как показано на фиг. 4.1. Примем $AB = CD = d$ и $BC = AD = 2d$.

Точечный источник S , помещенный в фокусе объектива O_1 , испускает монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм.

1. Интерферометр с равным ходом лучей

1. При помощи отъюстированной установки покажите, что две плоские волны, распространяющиеся вдоль оси Cx , когерентны и синфазны. Какова интенсивность каждого отдельного луча? I_0 — интенсивность источника. Коэффициенты пропускания и отражения для делителей лучей точно равны $1/2$.

Поместите объектив с фокусным расстоянием d в O_2 , так что $CO_2 = d$. Этот объектив дает действительное изображение пло-

скости P , лежащей на BC , в плоскости B' . Что наблюдается в плоскости P' ?

2. Поместите в P тонкую пленку (будем считать, что толщина, поглощение и дисперсия пренебрежимо малы, а фазовый сдвиг постоянен). Опишите новый вид светового поля в плоскости P . Покажите, что при помощи фотометрического измерения можно определить сдвиг фаз φ , вносимый пленкой L . В качестве определения контрастности примем

$$\Gamma = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}}}.$$

Численный пример. Вычислить сдвиги фаз φ_1 и φ_2 , вызванные двумя пленками L_1 и L_2 соответственно, которые дают контрастность $\Gamma_1 = 1$ и $\Gamma_2 = 0,25$.

3. На какую величину Δy необходимо сместить делитель лучей S параллельно самому себе, чтобы увидеть темное поле? Вычислите контрастность и обсудите преимущество этого метода перед предыдущим.

II. Интерферометр с полосами в качестве изображения

1. Рассмотрим установку, описанную в I, 1. Поверните зеркало D на угол $\alpha = 2'$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Опишите систему полос и рассчитайте интервал между ними.

2. Каков вид поля в белом свете?

3. Вновь введите пленку L . Покажите, что смещение центральной полосы дает достаточную информацию для оценки фазового сдвига, вносимого пленкой. Рассчитайте смещение для значений φ_1 и φ_2 , упоминаемых в I, 2. Примите в качестве единицы длины интервал между полосами i , соответствующий длине волны $\lambda = 0,5$ мкм.

4. Увеличьте источник S и найдите плоскость, в которой локализуются полосы.

РЕШЕНИЕ

I. Интерферометр с равным ходом лучей

1. Лучи 1 и 2, исходящие из одного и того же точечного источника, распространяются как когерентные волны:

геометрические пути ABC и ADC равны,

отражения в A и B с одной стороны и в D и C с другой стороны одинаковы, и каждый луч проходит через делитель луча один раз.

Следовательно, оптические пути равны, и волны, идущие вдоль Sx , находятся в фазе.

Поскольку источник точечный, интерференция не локализована.

После отражения в A луч I переносит энергию $I_0/2$, и после прохождения через второй делитель луча C его энергия падает до величины $I_0/4$.

Оба интерферирующих колебания имеют амплитуду $\sqrt{I_0/4}$. Таким образом, световое поле в направлении Sx равномерно освещено:

$$I_1 = \left(2 \sqrt{\frac{I_0}{4}}\right)^2 = I_0. \quad (1)$$

Примечание. Если вдоль Sx мы наблюдаем интерференцию с усилением, то вдоль направления Sy , которое перпендикулярно Sx , мы обнаруживаем интерференцию с ослаблением, так как отражения на делителе луча C имеют разную природу (воздух — стекло для луча Sx и стекло — воздух для луча Sy).

Плоскости P и P' являются сопряженными с единичным увеличением, так как они представляют собой главные плоскости объектива O_2 . Позднее в этой задаче мы сочтем целесообразным для проведения измерений убрать плоскость наблюдения из интерферометра.

2. Пленка L , помещенная в плоскости P , вызывает постоянный фазовый сдвиг для всех лучей, которые ее пересекают. Эти лучи обладают амплитудой

$$\sqrt{\frac{I_0}{4}} \cdot e^{i\varphi},$$

тогда как амплитуда лучей 2 остается равной

$$\sqrt{\frac{I_0}{4}}.$$

Таким образом, освещенность изображения пленки есть

$$I_2 = \frac{I_0}{2} [1 + \cos \varphi] \leq I_0. \quad (2)$$

Объект будет выглядеть более или менее темным на ярком фоне (фиг. 4.2) с контрастностью

$$\Gamma = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}}} = \frac{I_1 - I_2}{I_1} = \frac{1 - \cos^2 \varphi/2}{1}, \quad (3)$$

$$\Gamma = \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

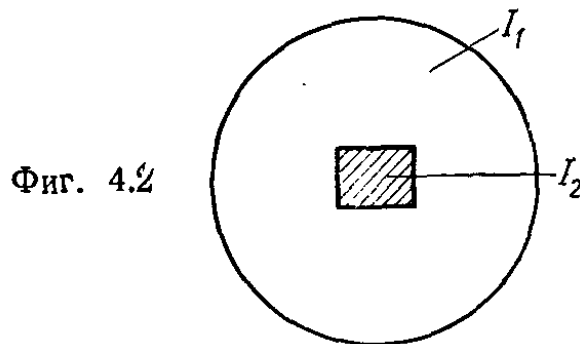
Численные примеры:

$\Gamma = 1 \rightarrow I_2 = 0 \rightarrow \varphi = \pi, 3\pi, \dots$ изображение объекта — темное на ярком фоне

$$\Gamma = 0,25 \rightarrow I_2 = 0,75I_0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \dots$$

$\Gamma = 0 \rightarrow I_2 = I_0 \rightarrow \varphi = 2\pi, 4\pi, \dots$ фон равномерно яркий, объект невидим.

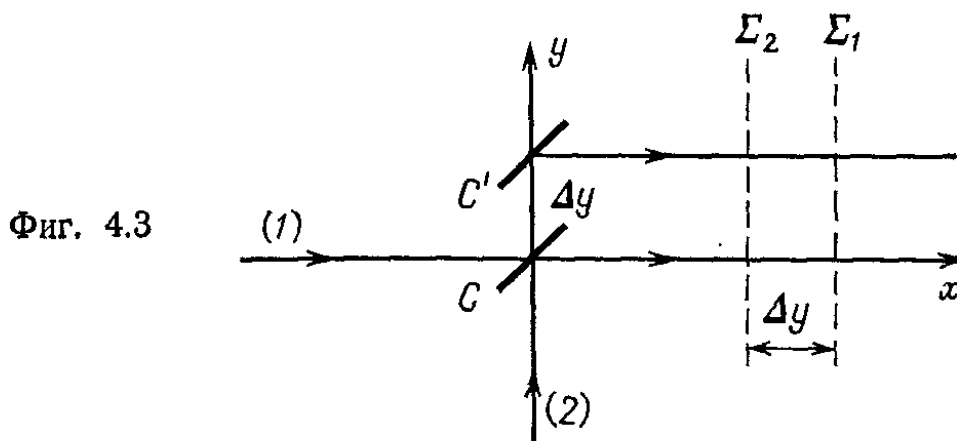
Из фотометрического измерения величин I_1 и I_2 можно получить φ .



Примечание. Если пленка вносит лишь очень небольшой фазовый сдвиг, то контрастность может быть записана как

$$\Gamma = \frac{\varphi^2}{4}.$$

В этом выражении φ входит во второй степени и, таким образом, величина Γ очень мала. Эта установка не позволяет обнаружить малый фазовый сдвиг.



3. Необходимо, чтобы колебания луча 1 (перед введением объекта) и луча 2 были совершенно не в фазе. Если C смещается, то путь луча 1 не изменяется, а путь луча 2 увеличивается на Δy (фиг. 4.3).

Мы хотим получить

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y = \pi, \quad (4)$$

откуда

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2} = 0,25 \text{ мкм.}$$

При этих условиях

$$I_1 = 0,$$

$$I_2 = \frac{I_0}{2} [1 + \cos(\varphi - \pi)] = \frac{I_0}{2} [1 - \cos \varphi] = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

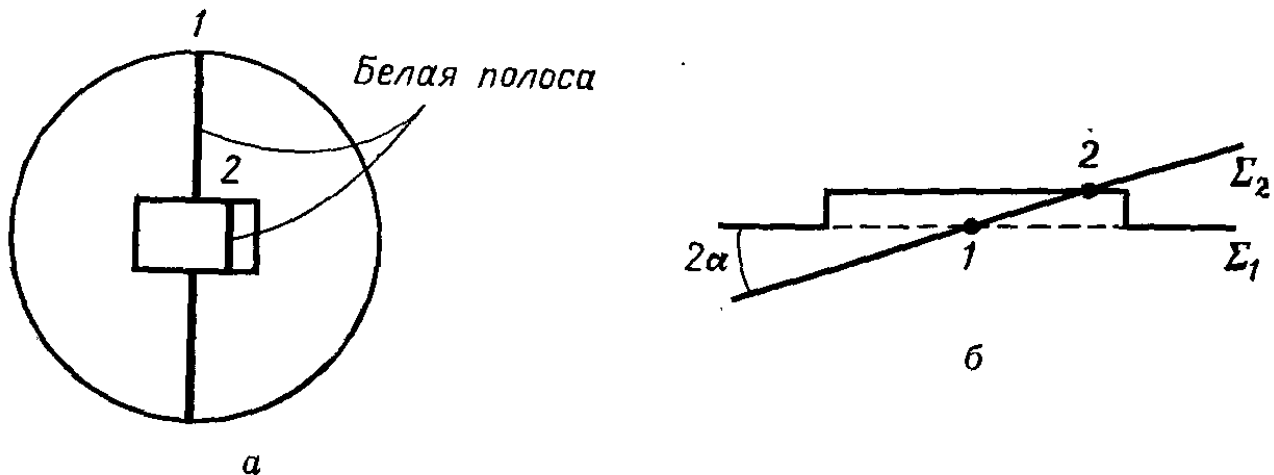
Следовательно,

$$\Gamma = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}}} = \frac{I_2 - I_1}{I_2} = \frac{I_0 \sin^2 \varphi/2 - 0}{I_0 \sin^2 \varphi/2} = 1.$$

Объект выглядит ярким на темном фоне с максимальной контрастностью для любого значения φ . Используя этот метод, можно обнаружить чрезвычайно малые изменения фазы.

II. Интерферометр с полосами в качестве изображения

1. Если зеркало D повернуть на угол α , то волновая поверхность Σ_2 поворачивается на угол 2α . Будут видны вертикальные прямые полосы, перпендикулярные плоскости рисунка.



Фиг. 4.4

Полоса нулевого порядка находится на оси Sx . Система полос с яркими центральными линиями имеет интервал

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0,42 \text{ мм.}$$

2. *Наблюдение в белом свете.* Центральная полоса — белая и ахроматичная. Полосы, которые ее окружают, подобны радуге с голубой частью, направленной к центру, и красной — наружу.

3. Опорная волна Σ_2 не возмущена, волна Σ_1 имеет сдвиг (фиг. 4.4, а). В изображении пленки L белая полоса смещена

от 1 до 2 (фиг. 4.4, б). Это смещение можно измерить окулярным микрометром.

Численный пример. Для $\varphi = 2k\pi$ (k — любое) смещение полосы равно $d = ki$:

$$\varphi = \pi \rightarrow k = \frac{1}{2} \rightarrow d = \frac{i}{2} = 0,21 \text{ мм},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \rightarrow k = \frac{1}{6} \rightarrow d = \frac{i}{6} = 0,07 \text{ мм}.$$

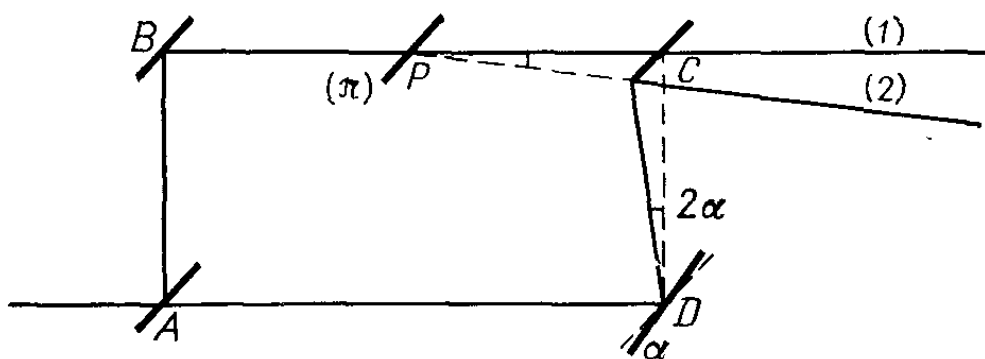
Чтобы получить φ , необходимо измерить:

смещение центральной полосы,

интервал между полосами в монохроматическом свете известной длины волны.

4. *Локализация.* В случае протяженного источника S полосы становятся локализованными.

Теорема. Поверхность локализации определяется точками пересечения двух лучей, образующихся из одного падающего пучка.



Фиг. 4.5

В случае интерферометра Маха поверхность локализации совпадает с изображением зеркала D , образованным в делителе луча C . Это плоскость π , проходящая через P и наклоненная под углом 45° к BC (фиг. 4.5). (На практике обнаруживают, что полосы локализуются в несколько более протяженной области, окружающей P .)

ЗАДАЧА 5

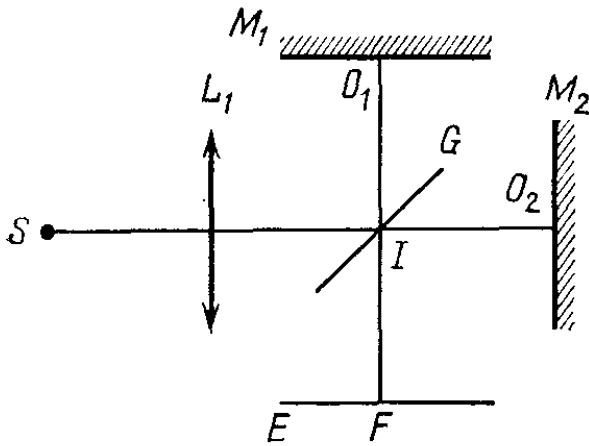
Интерферометр Майкельсона

Рассмотрим интерферометр Майкельсона, изображенный на фиг. 5.1. Источник S помещается в фокусе линзы L_1 . Сначала зеркала M_1 и M_2 взаимно перпендикулярны и расположены под углом 45° к делителю лучей G . В этой задаче не рассматриваются эффекты, связанные с отражением или пропусканием через G .

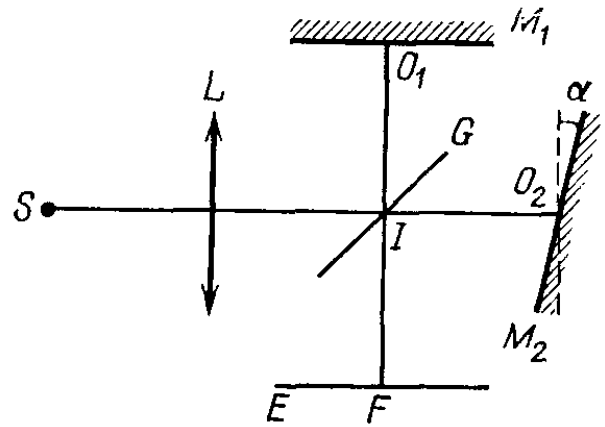
I

Точечный источник S испускает монохроматическую волну с $\lambda = 5461 \text{ \AA}$.

1. Зеркало M_1 остается в своем первоначальном положении, тогда как зеркало M_2 поворачивается на угол α вокруг оси O_2 , перпендикулярной плоскости рисунка (фиг. 5.2). Что будет видно в этом случае?



Фиг. 5.1

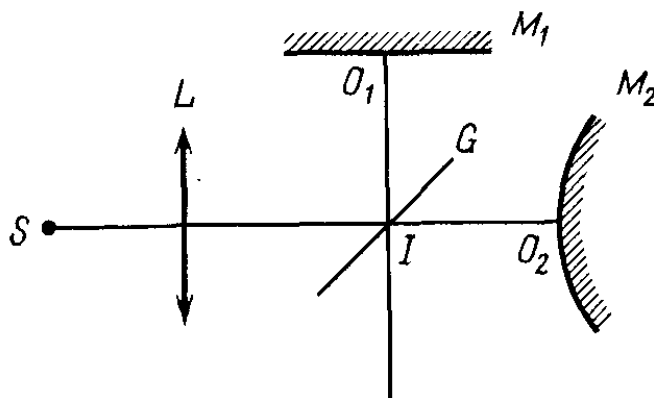


Фиг. 5.2

а) Объясните, почему полосы не локализованы и имеют всюду один и тот же интервал.

б) Рассчитайте интервал между полосами в плоскости E , перпендикулярной направлению IO_1 , если задано $\alpha = 1'$.

2. M_1 — опять плоское зеркало, но M_2 заменяется теперь сферическим зеркалом (выпуклым или вогнутым) с радиусом



Фиг. 5.3

$R = 10$ (фиг. 5.3). Центр зеркала M_2 находится на IO_2 . Вершина зеркала M'_2 (изображение M_2 в делителе лучей) совпадает с O_1 . Плоскость наблюдения E проходит через O_1 .

а) Каков вид центра колец? Рассчитайте радиусы первых трех ярких колец, наблюдаемых при этих условиях. Одинаков ли результат для вогнутого или выпуклого зеркал?

б) Зеркало M_1 движется навстречу делителю лучей. Каково смещение колец, если M_2 — выпуклое зеркало?

в) Что произойдет в случае «б», если M_2 — вогнутое зеркало?

II

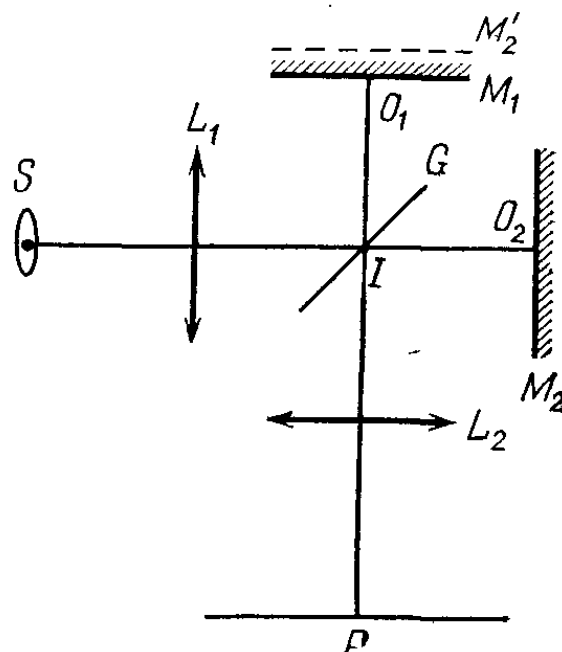
Точечный источник S испускает белый свет с $0,4 < \lambda < 0,8$ мкм. Щель спектрографа с дисперсией, пропорциональной длине волны, расположена в плоскости, сопряженной плоскости E . Щель параллельна плоскости рисунка. Ее центр совпадает с продолжением оси IO_1 . Что наблюдается в выходной фокальной плоскости спектрографа, если осуществляются опыты, описанные в п. I. 1 и I. 2?

Для обоих случаев укажите точное положение ярких линий. (Высота щели $l = 10$ мм.)

III

Пусть S — протяженный монохроматический источник ($\lambda = 5461 \text{ Å}$). Зеркало M_1 остается в своем первоначальном положении, M_2 вновь заменяется плоским зеркалом. Будем считать, что изображение M'_2 параллельно M_1 и находится на расстоянии примерно 1 см от M_1 (фиг. 5.4).

Линзы L_1 и L_2 имеют фокусное расстояние $f = 1$ м.



Фиг. 5.4

1. Объясните, почему полосы локализованы. Где находится плоскость локализации?

2. Центр наблюдаемых колец имеет максимальную интенсивность. Рассчитайте радиусы первых трех ярких колец. Как будет изменяться интерференционная картина, если M'_2 приблизить к M_1 ?

3. Каков минимальный диаметр источника, три полосы которого будут видны?

4. Что произойдет, если источник S передвинуть из центра на 12,8 мм? Нарисуйте точный вид плоскости локализации.

РЕШЕНИЕ

I. Монохроматический точечный источник на бесконечности

1. Зеркала M_1 и M_2 плоские

а) В случае точечного источника полосы не локализуются. Если зеркала расположены под углом α , то имеются две плоские волны, которые образуют угол 2α . Мы получаем экви-

дистантные прямые полосы, перпендикулярные плоскости фиг. 5.2.

б) Интервал между полосами равен

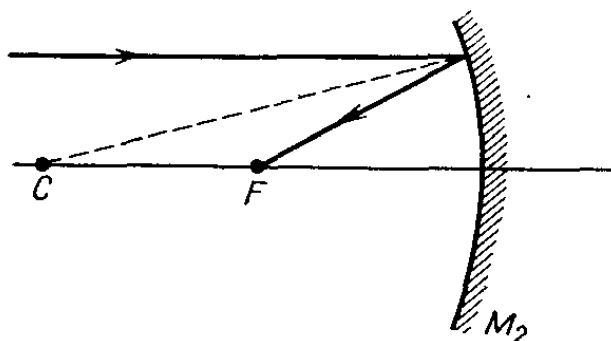
$$i = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{0,5461}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-3} = 0,91 \text{ мм.}$$

2. Зеркало M_1 — плоское, M_2 — сферическое

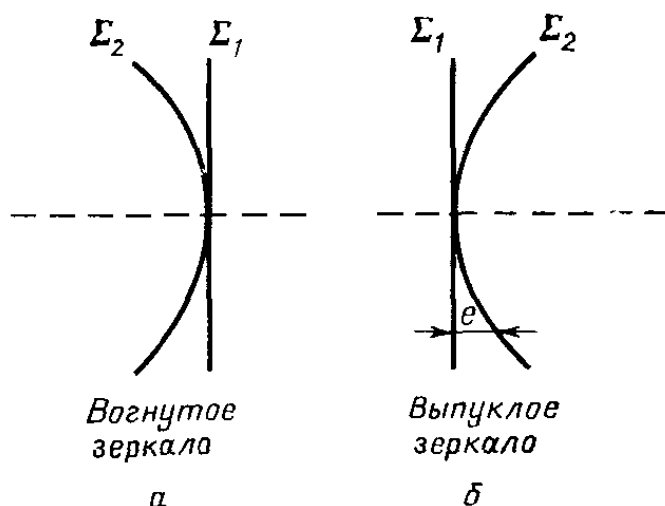
Интерференция возникает теперь в результате взаимодействия плоской волны Σ_1 и сферической волны Σ_2 с радиусом, равным фокусному расстоянию зеркала (фиг. 5.5)

$$f_{\text{зеркала}} = \frac{R}{2} = 5 \text{ м.}$$

а) Относительное положение двух волн Σ_1 и Σ_2 показано на фиг. 5.6, а и 5.6, б.



Фиг. 5.5



Фиг. 5.6

Интерференционная картина (фиг. 5.6) не зависит от знака радиуса M_2 . Она имеет вид колец Ньютона с ярким центром (поскольку Σ_1 и Σ_2 касаются в точке пересечения с осью).

На расстоянии x от оси разность хода двух лучей $\delta = e$, так что

$$x^2 = (2f - e)e \approx 2fe = Re. \quad (1)$$

Радиусы ярких колец ($\delta = k\lambda$) определяются выражениями

$$r = \sqrt{k} \sqrt{\lambda R} = \sqrt{k} \sqrt{0,5461 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3},$$

$$r (\text{в мм}) = 2,34 \sqrt{k} \quad (k - \text{целое число}). \quad (2)$$

Радиусы первых трех ярких колец равны

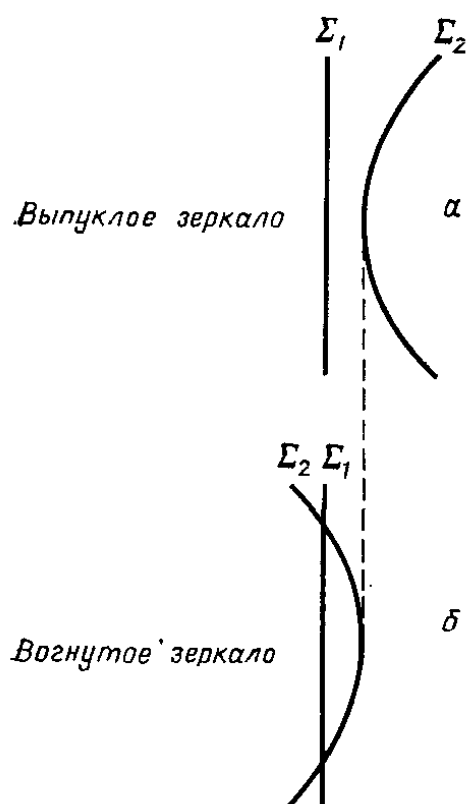
$$k=1, \quad r_1=2,34 \text{ мм},$$

$$k=2, \quad r_2=3,30 \text{ мм},$$

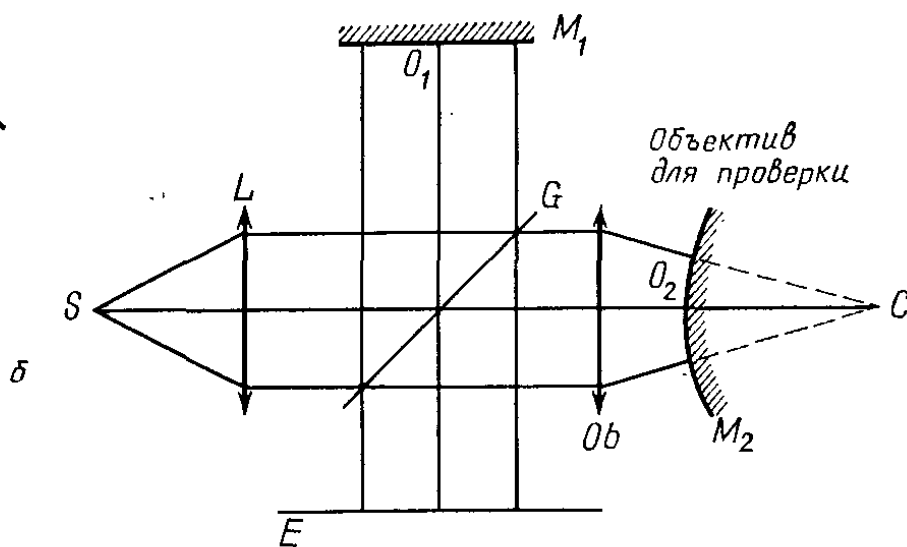
$$k=3, \quad r_3=4,04 \text{ мм}.$$

Теперь будем приближать зеркало M_1 к делителю лучей.

б) M_2 — *выпуклое* зеркало. Относительное положение волновых поверхностей показано на фиг. 5.7, а. Если зеркало M_1 смещается вперед, то кольца раздвигаются на краях и сгущаются в центре. Число колец будет много больше, чем в случае «а».



Фиг. 5.7



Фиг. 5.8

в) M_2 — *вогнутое* зеркало. Кольца раздвигаются в центре и сгущаются на краях. Центральное кольцо лежит на пересечении Σ_1 и Σ_2 .

Примечание. Модифицированный таким образом интерферометр называется интерферометром Тваймана. Он обычно используется для проверки качества объективов (фиг. 5.8).

Объектив Ob устанавливается таким образом, что его фокус точно совпадает с центром C зеркала M_2 . В случае идеального объектива лучи, возвращающиеся вдоль этого пути, являются плоскими волнами, и мы наблюдаем картину интерференции двух плоских волн. Если объектив имеет дефекты, то волна Σ_2 уже не будет плоской. После интерференции с опорной плоской волной Σ_1 (отраженной от M_1) она образует деформированные полосы.

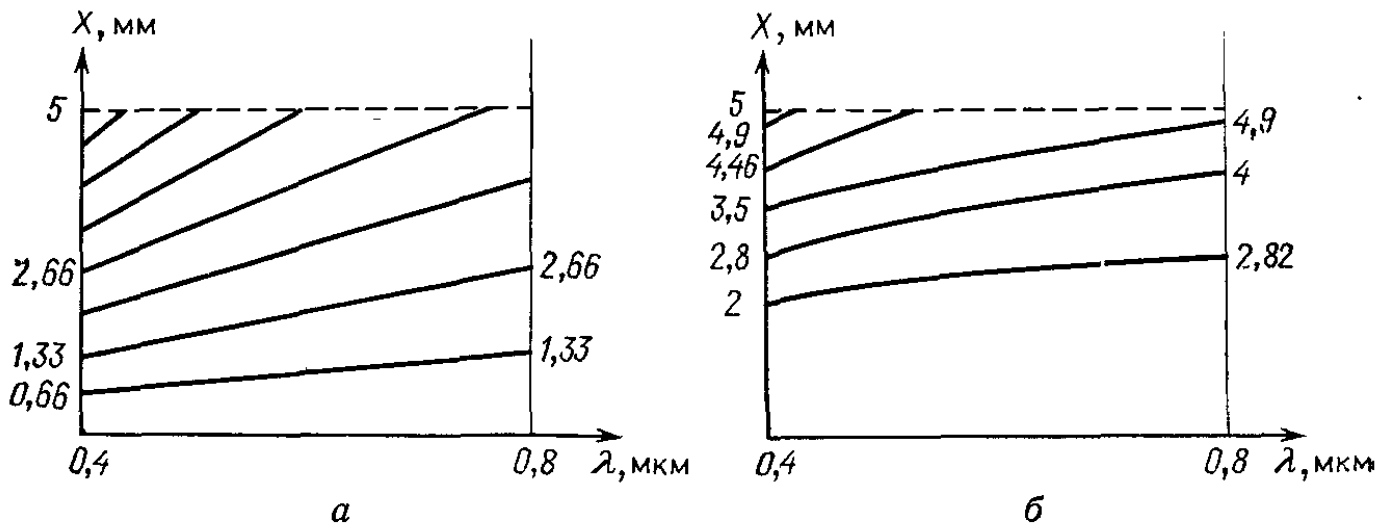
II. Полихроматический источник

1. Щель спектрографа перпендикулярна прямым полосам и параллельна поверхности M_1 (вдоль оси x) в плоскости рисунка.

Мы наблюдаем интерференцию с усилением, если $2\alpha x = k\lambda$ (k — целое число). Так как дисперсия спектрографа пропорциональна λ (коэффициент пропорциональности примем равным 1), уравнение для положения ярких полос будет иметь вид

$$x = \frac{1}{2\alpha} k\lambda. \quad (3)$$

При этом образуются группы полос (фиг. 5.9, а).



Фиг. 5.9

а — прямые полосы — прямые линии; б — кольца Ньютона — параболы

Интерференция двух волн создает широкие полосы.

2. Выражение (1) позволяет получить уравнение для ярких полос

$$x^2 = R \cdot k\lambda. \quad (4)$$

Эти полосы представляют собой параболы с вершинами на оси λ , совпадающими при $\lambda = 0$.

III. Протяженный монохроматический источник. Кольца на бесконечности

1. Наблюдаются полосы равного наклона, локализованные на бесконечности.

2. Если i — угол падения лучей на зеркала M_1 и M_2 , то разность хода между отраженными лучами равна

$$\delta = 2e \cos i = 2e \left(1 - \frac{i^2}{2} \right). \quad (5)$$

Центр виден как яркая точка. Порядок интерференции на оси есть целое число k_0 . Яркие кольца образуются лучами, состав-

ляющими угол i с осью, так что

$$i = \sqrt{k_0 - k} \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \quad (k - \text{целое число}). \quad (6)$$

В фокальной плоскости линзы L_2 радиусы ярких колец даются выражением

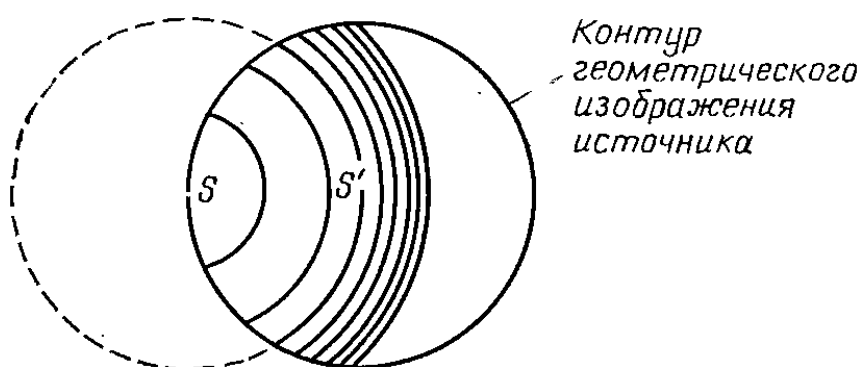
$$r \text{ (в мм)} = fi = 10^3 \sqrt{k_0 - k} \sqrt{\frac{0,5461}{10^4}} = \sqrt{k_0 - k} \sqrt{54,61},$$

$$k_0 - k = 1, \quad r_1 = 7,39 \text{ мм},$$

$$k_0 - k = 2, \quad r_2 = 10,45 \text{ мм},$$

$$k_0 - k = 3, \quad r_3 = 12,80 \text{ мм}.$$

3. Эти кольца образуют изображение источника (линзы L_1 и L_2 обладают одинаковым фокусным расстоянием; источник и его изображение имеют один и тот же размер).



Фиг. 5.10

Для наблюдения трех колец необходимо, чтобы источник имел минимальный размер

$$D = 2r_3 = 2 \cdot 12,8 \text{ мм},$$

$$D_{\text{мин}} = 25,6 \text{ мм}.$$

4. Если удалить источник с центральной линии, то можно увидеть только части колец, лежащих на геометрическом изображении источника. Тем не менее центр колец совпадает с осью прибора.

Центр колец лежит в точке S (фиг. 5.10), а центр изображения источника лежит в точке S' ($SS' = 12,8$ мм).

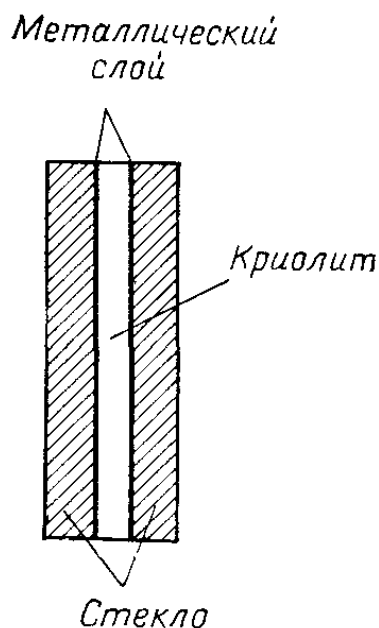
Примечание. Кольца Ньютона и кольца на бесконечности имеют один и тот же вид. Первые обусловлены изменениями толщины (равный наклон), вторые — изменениями угла падения (равная толщина). В первом случае k увеличивается с удлинением оси, во втором случае k уменьшается.

ЗАДАЧА 6

Интерференционные фильтры

Два полуметаллизированных слоя стекла разделены фиксированным расстоянием e с постоянным показателем преломления среды n (фиг. 6.1).

1. Такой фильтр необходим для получения максимума пропускания в случае нормального падения волн с $\lambda = 5500 \text{ \AA}$. Зная, что промежуточным веществом является криолит с показателем преломления $n = 1,35$, определите возможные значения для расстояния e . Желательно иметь только одну полосу пропускания между 4000 и 7500 $\text{\AA}$ (фазовым сдвигом при отражении от металлизированных поверхностей можно пренебречь).



Фиг. 6.1

2. Как изменится длина волны максимума пропускания, если параллельные лучи падают на фильтр под углом i , а не под прямым углом?

РЕШЕНИЕ

1. Нормальное падение

Максимумы пропускания соответствуют интерференции с усилением, т. е. разности хода

$$\delta = 2ne = k_0\lambda_0 = \dots = k\lambda, \quad (1)$$

где $k_0, \dots, k$ — целые числа, указывающие на порядок интерференции для длин волн $\lambda_0, \dots, \lambda$.

Находим максимум пропускания для фильтра с такой толщиной криолита, что

$$e = k_0 \frac{\lambda_0}{2n} = k_0 e_0, \quad (2)$$

$$e = k_0 \cdot \frac{5500}{2 \cdot 1,35} = k_0 \cdot 2040 \text{ \AA}.$$

Определим другие полосы пропускания в видимой области спектра. Только при расстояниях $e = e_0 = 2040 \text{ \AA}$ и $e = 2e_0 = 4080 \text{ \AA}$ имеется одна полоса пропускания.

Таблица 6.1

e	λ_1	λ_0	λ_2	Число полос пропускания
e_0	$k = 0,73$	$k_0 = 1$	$k = 1,73$	1
$2e_0$	$k = 1,46$	$k_0 = 2$	$k = 2,74$	1
$3e_0$	$k = 2,12$	$k_0 = 3$	$k = 4,11$	2

2. Наклонное падение

При этом разность хода становится равной

$$\delta = 2ne \cos r = k_0 \lambda'_0. \quad (3)$$

Сравните это выражение с уравнением (1). Мы находим тот же порядок интерференции для более коротких волн

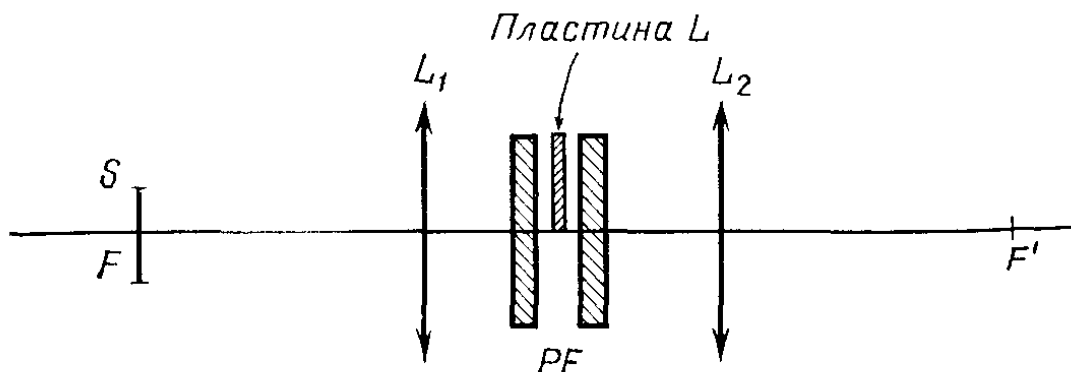
$$\lambda'_0 < \lambda_0.$$

Когда фильтр наклонен, полосы пропускания сдвигаются в сторону более коротких волн.

ЗАДАЧА 7

Эталон Фабри — Перо. Использование экранов

Пластины эталона Фабри — Перо устанавливаются строго параллельно на расстоянии 1 см друг от друга при помощи трех инваровых клиньев. Эталон помещается между двумя идентичными собирающими линзами L_1 и L_2 , имеющими фокусное расстояние 15 см. В фокальной плоскости линзы L_1 располагается



Фиг. 7.1

источник света диаметром 1 см (с центром в главном фокусе линзы L_1). Этот источник испускает монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 0,49$ мкм (фиг. 7.1).

Показатель преломления воздуха примем равным 1.

1. Рассчитайте порядок интерференции в точке F' .

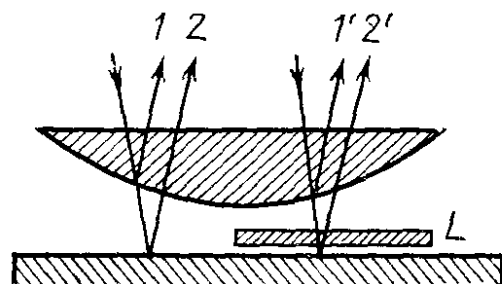
Сколько ярких колец можно увидеть в фокальной плоскости линзы L_2 ?

Каков порядок интерференции и радиус самого большого из колец?

2. Между полупосеребренными пластинами поместите непрозрачный экран, который закроет половину поверхности этих пластин.

Что будет видно в фокальной плоскости линзы L_2 ?

3. Замените непрозрачный экран прозрачной пластиной толщиной 0,5 мм с показателем преломления 1,5. Определите вид светового поля. Определите значения радиусов ярких колец.



Фиг. 7.2.

4. Что будет видно, если ту же стеклянную пластину поместить в установку, которая дает кольца Ньютона для нормально падающего света (фиг. 7.2)?

РЕШЕНИЕ

1. Пусть i — угол падения. Два соседних луча имеют разность хода

$$\delta = 2ne \cos i = 2ne \left[1 - \frac{i^2}{2} \right]. \quad (1)$$

Положение ярких интерференционных колец определяется выражением

$$2ne \left[1 - \frac{i^2}{2} \right] = k\lambda, \quad (2)$$

где k — целое число.

Порядок интерференции в центре есть

$$k_0 = \frac{2e}{\lambda} = \frac{2 \cdot 10^4}{0,49} = 40\,816,32. \quad (3)$$

Порядок интерференции на краю светового поля (i_M соответствует максимальному значению $i = 0,5/15 = 0,0333 = 1/30$ рад) равен

$$k(i_M) = k_{(0)} \left[1 - \frac{i_M^2}{2} \right] = 40\,793,65. \quad (4)$$

Порядок интерференции самого большого кольца равен 40 794. Угловой радиус соответствует значению

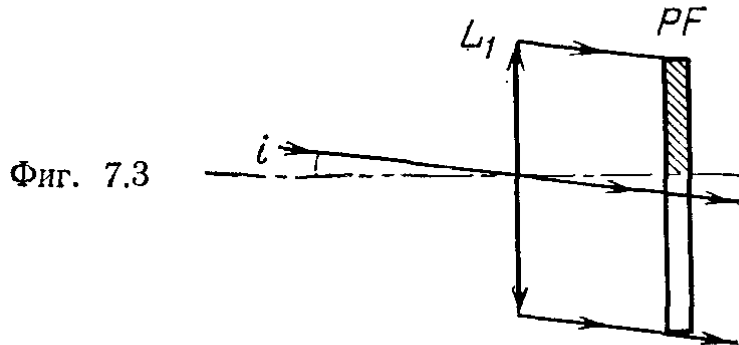
$$i = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k_{(0)} - k_{(i)}}{k_{(0)}}} = 0,03307 \text{ рад},$$

откуда линейный радиус равен

$$r = fi = 0,4960 \text{ см.}$$

Двадцать второе кольцо имеет радиус, равный 4,96 мм (по существу находится на краю поля).

2. Половина падающих лучей не проходит сквозь эталон. Поэтому полезная поверхность эталона вдвое меньше. Положение и радиусы колец остаются неизменными, однако их освещенность уменьшается вдвое (фиг. 7.3).



3. Пусть параллельный пучок лучей образует угол i с осью системы. Два луча, которые проходят через нижнюю часть эталона, имеют разность хода

$$\delta_1 = 2e \cos i.$$

Два луча, проходящие через верхнюю часть эталона, имеют такую разность хода δ_2 , что если e — толщина пластины L , то

$$\delta_2(i) = 2(e - e') \cos i + 2ne' \cos r = \delta_1(i) + 2e' [n \cos r - \cos i],$$

$$\delta_2(i) = \delta_1(i) + 2e' \left[n \left(1 - \frac{r^2}{2} \right) - \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \right],$$

$$\delta_2(i) = \delta_1(i) + 2e' \left[(n - 1) + \frac{i^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \delta_1(i) + e' \left(1 + \frac{i^2}{3} \right).$$

Следовательно,

$$k_2(i) = k_1(i) + \frac{500}{0,49} \left(1 + \frac{i^2}{3} \right).$$

Мы видим в световом поле две системы ярких колец с центром в F' (фиг. 7.4).

Таблица 7.1

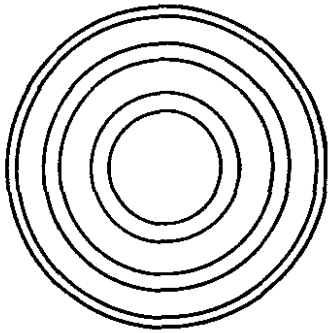
	Первая система колец	Вторая система колец
Порядок интерференции в центре	40 816,32	41 836,73
Порядок интерференции на краю	40 793,65	41 814,43
Число ярких колец	23	22

4. На одинаковом расстоянии x от оси системы лучи имеют следующие разности хода:

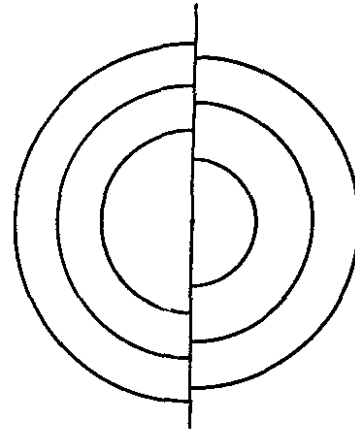
$$\delta = \frac{x^2}{R} \quad \text{для лучей } 1 \text{ и } 2,$$

$$\delta' = \frac{x^2}{R} + 2e'(n-1) \quad \text{для лучей } 1' \text{ и } 2'.$$

Какое бы значение k мы ни взяли, изменение порядка интер-



Фиг. 7.4



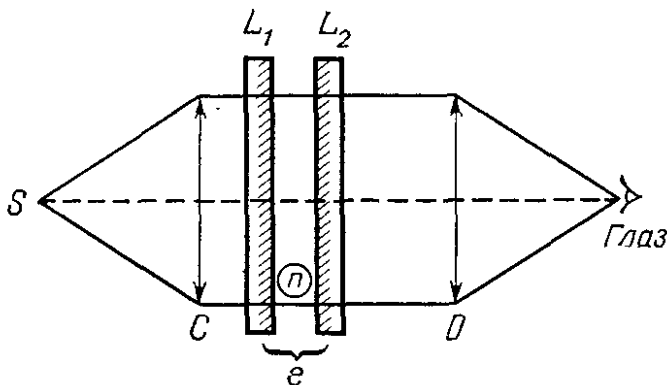
Фиг. 7.5

ференции $[2e'/\lambda(n-1) = 1020,41]$ выражается целым числом. При этом будут видны две системы колец, как показано на фиг. 7,5.

ЗАДАЧА 8

Наблюдение фазовых объектов методом Толанского

Рассмотрим интерферометр Фабри — Перо. Пластины L_1 и L_2 параллельны. Их поверхности разделены промежутком e и могут считаться полупрозрачными. Показатель преломления проме-



Фиг. 8.1

жуточной среды равен 1,5. Интерферометр освещается источником S , расположенным в фокусе коллиматора C . Глаз помещается в фокусе объектива O , который позволяет сфокусировать глаз на любую плоскость между L_1 и L_2 (фиг. 8.1).

I. Монохроматический точечный источник ($\lambda = 0,5$ мкм)

1. Изображение источника формируется в зрачке глаза, и наблюдаемое поле равномерно освещено. Вспомним, что освещенность дается выражением

$$I = I_M \frac{1}{1 + m \sin^2 \varphi/2},$$

где m — коэффициент, характеризующий установку и принятый равным 2500. Найти φ как функцию e и n .

Оставляя L_1 и L_2 параллельными, изменяйте промежуток e . Графически покажите изменение освещенности в зависимости от e .

2. Поместите между пластинами небольшой объект, вносящий сдвиг фазы, т. е. прозрачный объект толщиной e' , который отличается от среды только своим показателем преломления $n' \neq n$ (фиг. 8.2).

Для данного промежутка e :

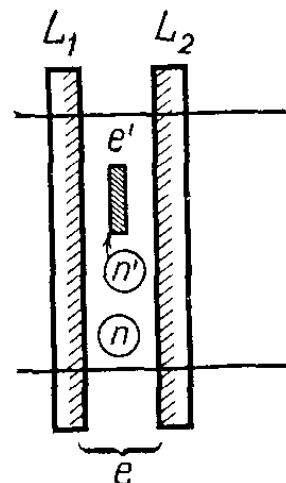
а) Рассчитайте фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ в области, занимаемой объектом.

б) Выведите закон изменения освещенности ΔI в этой области. Рассчитайте контрастность объекта по отношению к освещенности «фона», определяя контрастность как

$$\Gamma = \frac{\Delta I}{I}.$$

в) Для каких значений e контрастность максимальна?

г) Какова наименьшая разность хода, обнаруживаемая этим методом, если удастся наблюдать контрастность $\Gamma = 0,1$?



Фиг. 8.2

II. Влияние размеров источника

Источником теперь является небольшой светящийся диск с центром в S и диаметром d . Каждая точка источника создает освещенность $I(i, e, n)$, которая зависит от промежутка, показателя преломления и угла падения лучей на эталон. Будем считать, что освещенность остается неизменной для глаза, если максимальное изменение фаз $\varphi(i, e, n)$ и $\varphi(o, e, n)$ равно $\pi/50$.

Получите допустимые отклонения для размеров источника, если фокусное расстояние коллиматора равно $f = 50$ мм и $l = 1,5$ мм.

III. Влияние цвета источника

Рассмотрим точечный источник, испускающий излучение в интервале $d\lambda$, и эталон с разрешающей способностью $\lambda/d\lambda$. Указанному интервалу соответствует изменение фазы, которое, как и прежде, должно быть меньше $\pi/50$. Рассчитайте разрешающую способность эталона, приняв $e = 1,5$ мм.

РЕШЕНИЕ

I. Монохроматический точечный источник

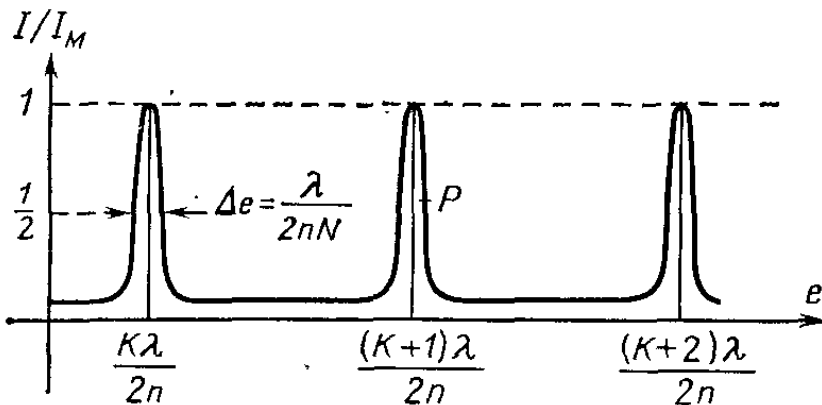
1. Два соседних параллельных луча отличаются по фазе на

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2ne. \quad (1)$$

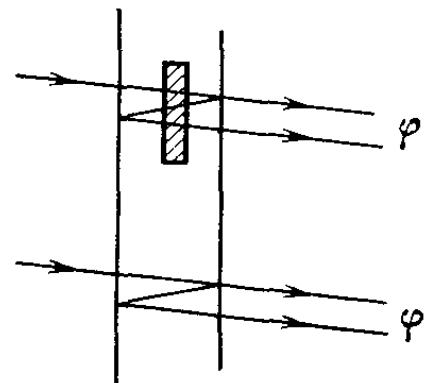
Пусть имеется интерферометр с равным ходом лучей. Его световое поле имеет цвет источника и освещение, описываемое выражением

$$I = I_M \frac{1}{1 + m \sin^2 \varphi/2}. \quad (2)$$

При изменении e меняется и освещенность: она проходит через максимум при $e = k\lambda/2n$ (фиг. 8.3).



Фиг. 8.3



Фиг. 8.4

Эти максимумы имеют ширину

$$\Delta e = \frac{\lambda}{2nN} \quad \text{с} \quad N = \frac{\pi \sqrt{m}}{2}. \quad (3)$$

2. а) Один из двух лучей, которые проходят через объект, имеет фазовый сдвиг (фиг. 8.4)

$$\varphi' = \varphi + \Delta\varphi, \quad (4)$$

где

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\delta \quad (5)$$

и

$$\Delta\delta = 2'(n' - n). \quad (6)$$

б) По определению

$$\Gamma = \frac{\Delta I}{I} = \frac{-m \sin \varphi/2 \cos \varphi/2}{1 + m \sin^2 \varphi/2} \Delta \varphi = \frac{-m \sin \varphi}{2(1 + m \sin^2 \varphi/2)} \Delta \varphi. \quad (7)$$

в) Контрастность максимальна при $d\Gamma/d\varphi = 0$, так что

$$\begin{aligned} \cos \varphi \left(1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) &= 2m \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \\ \sin^2 \frac{\varphi}{2} &= \frac{1}{m+2}, \\ \sin \varphi &= \frac{2\sqrt{m+1}}{m+2} \approx \frac{2}{\sqrt{m}} = \frac{4}{100}. \end{aligned} \quad (8)$$

Эталон Фабри — Перо должен иметь промежуток между пластинами

$$e = \frac{\lambda}{2n} \left[k \pm \frac{1}{\pi \sqrt{m}} \right]. \quad (9)$$

Подставляя значение φ в (7), получаем

$$\Gamma_{\text{макс}} = \frac{m\Delta\varphi}{2\sqrt{m+1}} \approx \frac{\sqrt{m}}{2} \Delta\varphi = 25 \Delta\varphi. \quad (10)$$

г) Если положить $\Gamma_{\text{макс}} = 0,1$, то получим

$$\Delta\varphi = \frac{1}{250} = 2\pi \frac{\Delta\delta}{\lambda};$$

следовательно,

$$\Delta\delta = \frac{\lambda}{2\pi \cdot 250} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 250} = 3,18 \text{ \AA}.$$

Примечание. Для достижения хорошей контрастности необходимо выбрать такую точку P на кривой фиг. 8.3, где изменения I велики. Идеальная точка соответствует

$$\frac{d}{d\varphi} \left[\frac{I'(\varphi)}{I} \right] = 0 \quad \text{или} \quad II'' - I'^2 = 0.$$

Это значение не совпадает с точкой перегиба кривой, для которой $I'' = 0$, но оно очень близко к ней в случае больших m .

II. Влияние размеров источника

Имеем

$$\delta_0 = 2ne, \quad (11)$$

$$\delta_i = 2ne \cos r = 2ne \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) = 2ne \left(1 - \frac{l}{2n^2}\right),$$

$$\Delta\delta = \delta_0 - \delta_i = \delta_0 \frac{l^2}{2n^2} = e \frac{l^2}{n}. \quad (12)$$

Мы хотим, чтобы $\Delta\varphi < \pi/50$, где $\Delta\delta < \lambda/100$. Таким образом,

$$i < \frac{1}{10} \sqrt{\frac{\lambda n}{e}} \quad \text{или} \quad d = 2fi = \frac{2 \cdot 50}{10} \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 1,5}{1,5 \cdot 10^3}},$$

$$d \leq 0,224 \text{ мм.}$$

III. Влияние спектральной ширины источника

Если источник не монохроматичен, то фазовый сдвиг не постоянен. Из (1) имеем

$$d\varphi = -\frac{4\pi ne}{\lambda^2} d\lambda.$$

Чтобы это изменение было меньше $\pi/50$, необходимо

$$\frac{\lambda}{d\lambda} \geq \frac{200ne}{\lambda} = \frac{200 \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{0,5},$$

т. е.

$$\frac{\lambda}{d\lambda} \geq 9 \cdot 10^5.$$

Такая величина разрешающей способности эталона считается большой.

ЗАДАЧА 9

Спектроскопия Фабри — Перо (интерференционная)

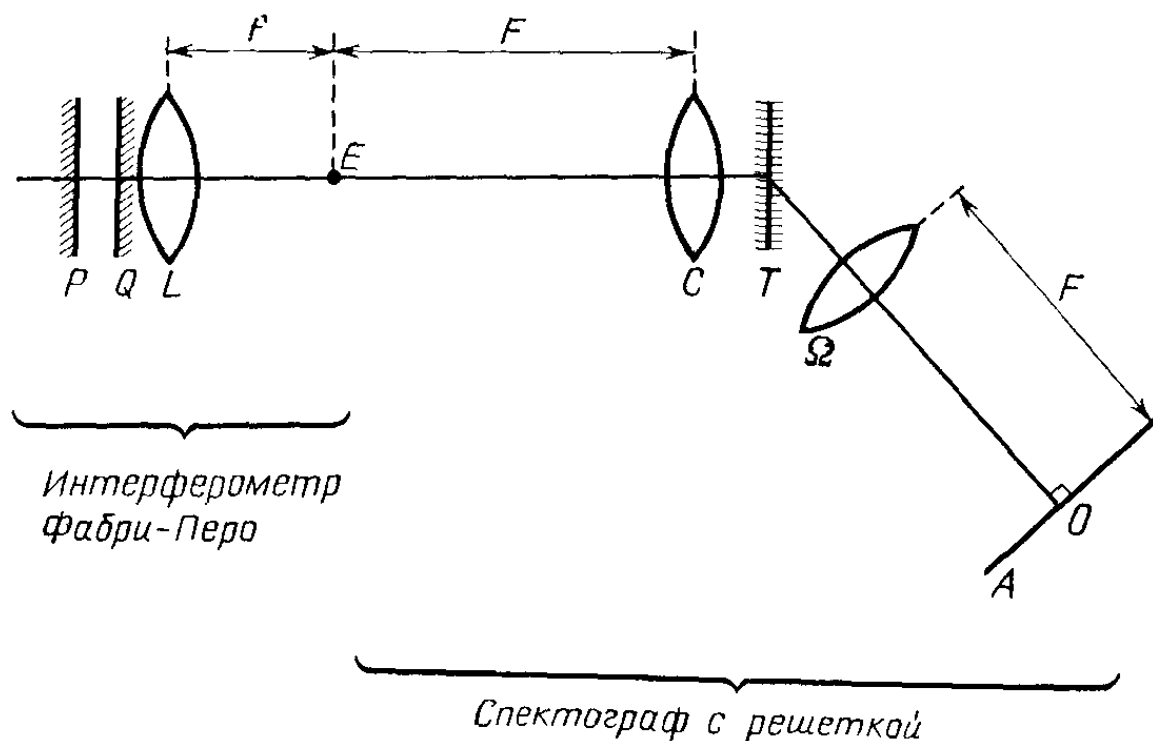
I

Рассмотрим интерференционную установку, образованную двумя параллельными стеклянными пластинами с воздушным зазором e , противолежащие стороны которых P и Q имеют более высокий коэффициент отражения (интерферометр Фабри — Перо). Отражение луча света на каждой из этих поверхностей сопровождается появлением фазового сдвига, который принимается равным нулю для всего излучения. Будем считать, что в установке не происходит отражения света от других поверхностей, кроме P и Q . Показатель преломления воздуха принимается равным единице. Линза L с фокусным расстоянием f , оптическая ось которой перпендикулярна поверхностям P и Q , расположена позади эталона (фиг. 9.1). Мы хотим изучить интерференционные кольца на большом расстоянии в результате прохождения света через интерферометр Фабри — Перо.

1. Вспомним, в какой плоскости следует наблюдать кольца без потери контрастности, если используется протяженный источник.

2. Рассчитайте длины волн излучения λ_K , для которых центр системы колец имеет максимум интенсивности при использовании порядка интерференции K .

3. Интерферометр освещается излучением с длиной волны λ чуть меньшей предыдущего значения λ_K . Рассчитайте угловой



Фиг. 9.1

радиус $\alpha_K(\lambda)$ ярких колец, соответствующих порядку интерференции K , в зависимости только от λ_K и λ . (По предположению, разность $\lambda_K - \lambda$ такова, что угол $\alpha_K(\lambda)$ можно считать малым.)

II

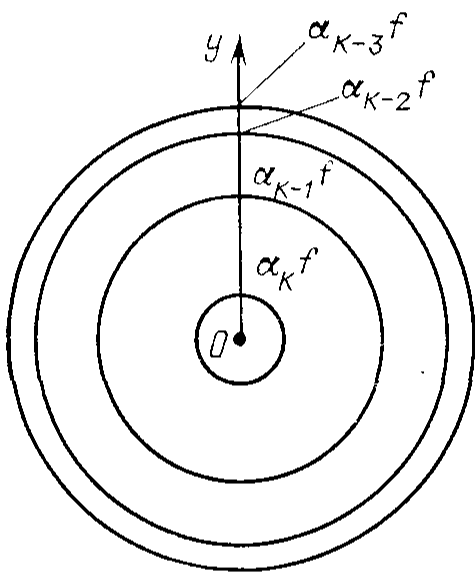
Рассмотрим спектрограф с дифракционной решеткой, образованный бесконечно узкой входной щелью E и решеткой пропускания T с шириной (нормальной к штрихам) $L = 5$ см, имеющей 1000 штрихов на 1 мм. Коллиматор C и объектив Ω имеют одинаковое фокусное расстояние $F = 3$ м. Оптическая ось коллиматора нормальна к поверхности решетки, и оптическая ось объектива параллельна дифрагированным лучам в первом порядке дифракции для длины волны $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$ (фиг. 9.1).

Каждое изображение щели, образованное спектрографом в случае монохроматического излучения, регистрируется на фотопластинке A , перпендикулярной оптической оси объектива. Точки на этой пластинке рассматриваются относительно прямоугольной системы координат с осями Ox и Oy . Различные монохроматические изображения щели образуются на оси Ox ; O — точка пересечения оптической оси объектива с пластинкой.

1. Каков промежуток, разделяющий на пластинке изображения щели, соответствующие длинам волн $\lambda_1 = 4500$ и $\lambda_2 = 5500 \text{ \AA}$ в первом порядке дифракции?
2. Рассчитайте значения линейной дисперсии $D = dx/d\lambda$ (в $\text{мм/\AA}$) для длин волн λ_0 , λ_1 и λ_2 в первом порядке дифракции.
3. Рассчитайте разрешающую силу решетки при использовании ее в первом порядке дифракции.

III

Входная щель описанного выше спектрографа помещается вдоль диаметра системы колец интерферометра, середина щели совпадает с центром системы колец (фиг. 9.2). Будем считать, что решетка всегда обеспечивает первый порядок дифракции, и



Фиг. 9.2

ограничимся излучением с длинами волн между λ_1 и λ_2 , так что дисперсию можно рассматривать как линейную и равную величине D , рассчитанной в II.2 для длины волны λ_0 .

1. Интерферометр освещается светом с длиной волны λ . Покажите, что на пластинке видны точки максимальной освещенности. Найдите координаты этих точек в системе xOy , которая определена выше.

2. На интерферометр падают две монохроматические волны с длинами λ и $\lambda + d\lambda$, которые очень близки друг к другу. Найдите разность dy ординат двух максимумов, соответствующих

одному и тому же порядку интерференции K . Выведите закон изменения значения $D' = dy/d\lambda$ дисперсии интерферометра.

Что произойдет с D' , если длина волны λ будет стремиться к значению λ_K ?

3. Интерферометр освещается белым светом. Покажите, что ряд максимумов появляется на фотопластинке в виде линий, и запишите уравнение этих линий в системе координат xOy . Опишите природу этих кривых.

Найдите расстояние, которое отделяет точки пересечения двух последующих кривых с осью Ox вблизи $\lambda = \lambda_0$ для $e = 2 \text{ мм}$.

4. Покажите, что разность ординат $y_2 - y_1$ двух точек M_2 и M_1 с максимумами, соответствующими порядкам интерференции K и $K - 1$ для длины волны λ , может быть выражена в виде

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{1}{y} \varphi(\lambda, f, e),$$

где y — ордината, лежащая между y_2 и y_1 . Считая, что разность Δy мала, выведите выражение для разности ординат δy двух точек, близких к точке M_1 на пластинке, для которых освещенность равна половине максимальной освещенности; при этом коэффициенты отражения P и Q предполагаются такими, что эффективное число интерферирующих лучей N равно 30.

Какова разрешающая сила R' этой установки для длин волн вблизи λ_0 ? Сравните ее с разрешающей силой спектрографа с решеткой. Укажите, почему необходимо использовать спектрограф в сочетании с интерферометром Фабри — Перо.

РЕШЕНИЕ

I. Кольца на большом удалении

1. Очень четкие кольца, яркие на темном фоне, локализируются на бесконечности. Их можно наблюдать в фокальной плоскости E линзы L .

2. Обнаруживается яркий центр для всех таких длин волн, что

$$\frac{2e}{\lambda_K} = K \rightarrow \lambda_K = \frac{2e}{K} \quad (K — \text{целое число}). \quad (1)$$

3. Кольца порядка K для длин волн $\lambda < \lambda_K$. Имеем

$$2e \cos \alpha_K(\lambda) = K\lambda. \quad (2)$$

Поскольку величина α_K мала,

$$2e \left(1 - \frac{\alpha_K^2}{2} \right) = K\lambda,$$

следовательно, используя (1), получаем

$$\alpha_K(\lambda) = \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_K}}. \quad (3)$$

II. Дисперсия решетки

1. Падающие лучи перпендикулярны решетке ($i = 0$). Пусть P — период решетки. Главные максимумы определяются выражением

$$P \sin i' = p\lambda \quad (p — \text{целое число}).$$

Спектры первого порядка образуются под таким углом дифракции i' , что

$$P \sin i' = \lambda \rightarrow \sin i' = \frac{\lambda}{P} = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Дифференцируя (4), получаем

$$P \cos i' di' = d\lambda. \quad (5)$$

Изображения входной щели, соответствующие λ_1 и λ_2 , разделены промежутком

$$dx = F di' = \frac{F d\lambda}{P \cos i'} = 3 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,1}{1 \cdot \sqrt{3}/2} = 2 \sqrt{3} \cdot 10^2, \quad (6)$$

$$dx = 346,5 \text{ мм.}$$

2. Объединяя (4) и (5), получаем значение

$$\frac{di'}{d\lambda} = \frac{1}{P \cos i'} = \frac{1}{P} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2/P^2}} = \frac{1}{\sqrt{P^2 - \lambda^2}},$$

для которого дисперсия решетки $D = dx/d\lambda$ в первом порядке равна

$$D = \frac{dx}{d\lambda} \frac{F}{\sqrt{P^2 - \lambda^2}}. \quad (7)$$

Здесь F выражается в миллиметрах, а P и λ — в ангстремах.

Численный пример:

$$\lambda_1 = 4500 \text{ Å}, \quad D_1 = \frac{3 \cdot 10^3}{\sqrt{10^8 - (4,5)^2 10^6}} = \frac{3}{\sqrt{10^2 - (4,5)^2}} = 0,335 \text{ мм/Å},$$

$$\lambda_2 = 5000 \text{ Å}, \quad D_0 = \frac{3 \cdot 10^3}{\sqrt{10^8 - (5)^2 10^6}} = \frac{3}{\sqrt{10^2 - (5)^2}} = 0,346 \text{ мм/Å},$$

$$\lambda_3 = 5500 \text{ Å}, \quad D_2 = \frac{3 \cdot 10^3}{\sqrt{10^8 - (5,5)^2 10^6}} = \frac{3}{\sqrt{10^2 - (5,5)^2}} = 0,36 \text{ мм/Å}.$$

3. Разрешающая сила решетки в первом порядке дифракции.

Две длины волны λ и $\lambda + d\lambda$ в спектре первого порядка разделены промежутком $di' = d\lambda/P \cos i'$. Ширина каждой линии равна

$$\delta i' = \frac{\lambda}{L \cos i'}. \quad (8)$$

Две линии разрешены, если

$$di' \geq \delta i'. \quad (8')$$

Разрешающая сила решетки в первом порядке дифракции равна

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda}, \quad (9)$$

так что, согласно (8'), получаем

$$R = \frac{L}{P} = \text{Число штрихов} = nL,$$

$$R = 1000 \cdot 50 = 5 \cdot 10^4.$$

III. Дисперсия эталона Фабри — Перо

Объективы S и Ω имеют одно и то же фокусное расстояние. Ордината сопряженных точек одинакова в плоскости E и в плоскости A (единичное увеличение). Достаточно изучить дисперсию эталона Фабри — Перо в фокальной плоскости линзы L .

1. Использование монохроматической волны с длиной λ .

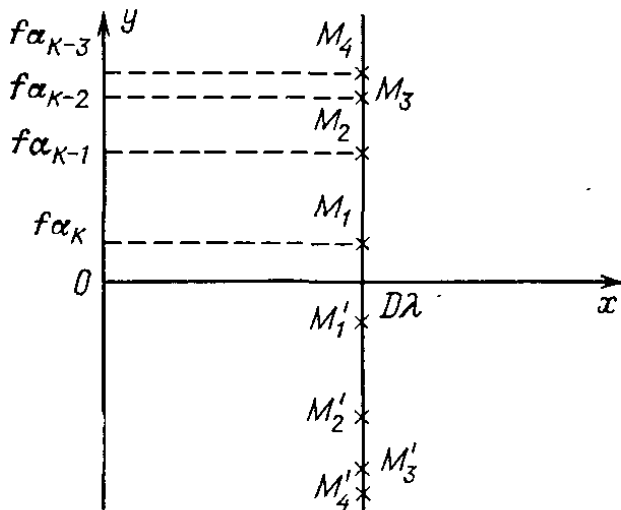
Яркие кольца наблюдаются при

$$\frac{2e}{\lambda} \cos \alpha_K = \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{\alpha_K^2}{2} \right) = K \quad (K - \text{целое число}). \quad (10)$$

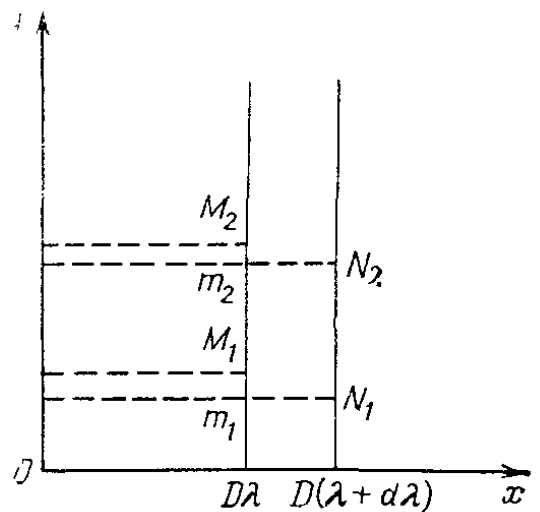
Входная щель спектрометра вырезает эти кольца по диаметру. В плоскости E яркие точки имеют ординаты (фиг. 9.2)

$$y = f \alpha_K = f \sqrt{2 - \frac{K\lambda}{e}}. \quad (11)$$

Входная щель совпадает с Oy . Фотопластинка перпендикулярна дифрагированным лучам первого порядка с длиной волны



Фиг. 9.3



Фиг. 9.4

$\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$. Для этого спектра считается, что решетка имеет постоянную дисперсию

$$D = \frac{dx}{d\lambda} = 0,346 \text{ мм/\AA}.$$

В плоскости A наблюдаются яркие точки с координатами (фиг. 9.3)

$$\begin{aligned} x &= D\lambda = \text{const}, \\ y &= f \sqrt{2 - \frac{K\lambda}{e}}. \end{aligned} \quad (12)$$

2. В этом случае имеем две монохроматические волны, λ и $\lambda + d\lambda$. Таким образом, в плоскости E наблюдаются две

концентрические системы колец и, следовательно, две серии ярких точек на входной щели. На пластинке видны две серии ярких точек, сдвинутых на $D \cdot d\lambda$ (фиг. 9.4). Вывод уравнения (11) позволяет написать

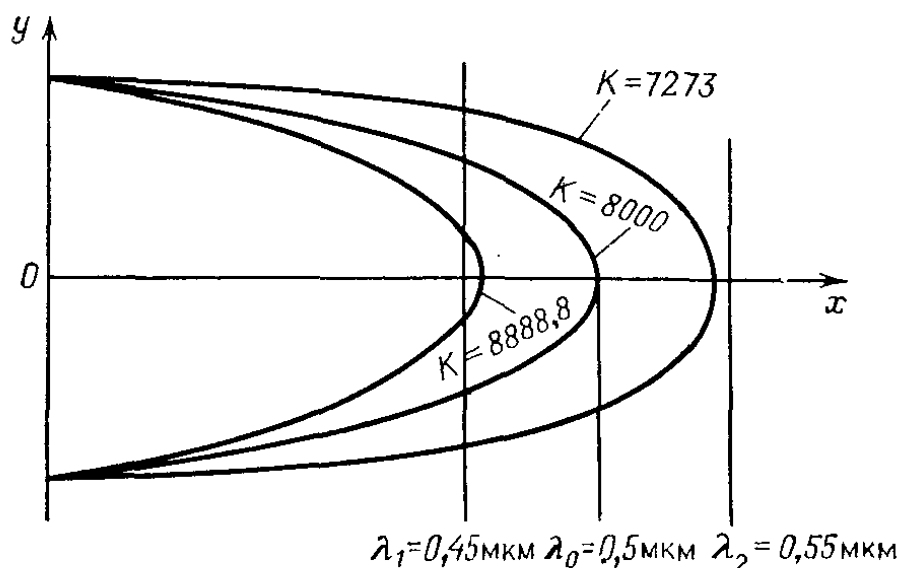
$$dy = -f \frac{K}{2e} \frac{1}{\sqrt{2 - K\lambda/e}} d\lambda. \quad (13)$$

Величина dy соответствует промежутку между двумя точками, равному Mm .

Из (13) выводим формулу для дисперсии эталона:

$$D' = \frac{dy}{d\lambda} = -f \frac{K}{2e} \frac{1}{\sqrt{2 - K\lambda/e}}. \quad (14)$$

Видно, что наибольшая дисперсия получается для максимальных значений K , т. е. для колец малого диаметра. В пределе при $\lambda = \lambda_K = 2e/K$ дисперсия D' становится бесконечной.



Спектры порядка +1

Фиг. 9.5

3. Полосатые спектры. Если источник излучает все длины волн между λ_1 и λ_2 , то уравнение для линий максимальной освещенности в плоскости xOy дается системой (12). Исключая λ , находим выражение

$$y^2 = f^2 \left(2 - \frac{K}{e} \frac{x}{D} \right). \quad (15)$$

Это яркие, очень четкие параболы с осью Ox .

Изменяя K на единицу, переходим от одной параболы к другой (фиг. 9.5). Их вершины лежат на оси Ox и имеют абсциссы

$$x = \frac{2e}{K} D. \quad (16)$$

Две последующие вершины разделены на

$$|\Delta x| = \frac{2e}{K^2} D \cdot \Delta K = \frac{2e}{K^2} D = \frac{\lambda_0^2}{2e} D = \frac{(5 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,346}{4 \cdot 10^7} \approx 0,2 \text{ мм.}$$

Имеём

$$\begin{aligned} \text{для } \lambda_1 &= 4500 \text{ Å,} & K_{\lambda_1} &= 2e/\lambda_1 = 8888,8, \\ \lambda_0 &= 5000 \text{ Å,} & K_{\lambda_0} &= 2e/\lambda_0 = 8000,0, \\ \lambda_2 &= 5500 \text{ Å,} & K_{\lambda_2} &= 2e/\lambda_2 = 7272,7. \end{aligned}$$

Тогда в поле зрения видно $(8888 - 7273) + 1 = 1616$ «частей» парабол. Они вогнуты в сторону голубого цвета.

4. Разрешающая сила интерферометра Фабри — Перо. Длина волны λ . Порядки K и $K - 1$.

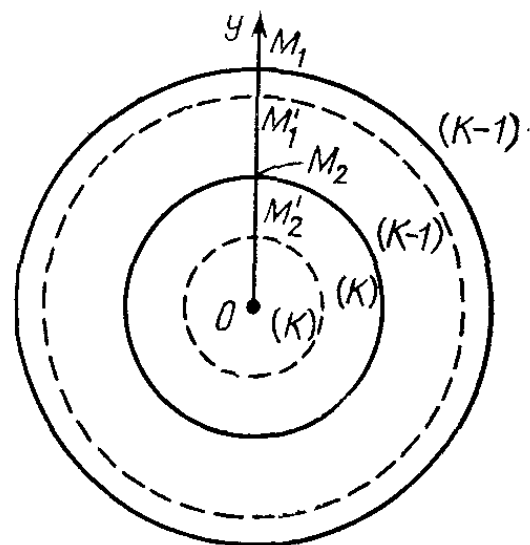
Пусть Δy — расстояние между точками M_1 и M_2 (фиг. 9.4). Из выражения (11) следует

$$\Delta y = -f \frac{\lambda}{2e} \frac{\Delta K}{\sqrt{2 - K\lambda/e}}.$$

Если $|\Delta K| = 1$, то

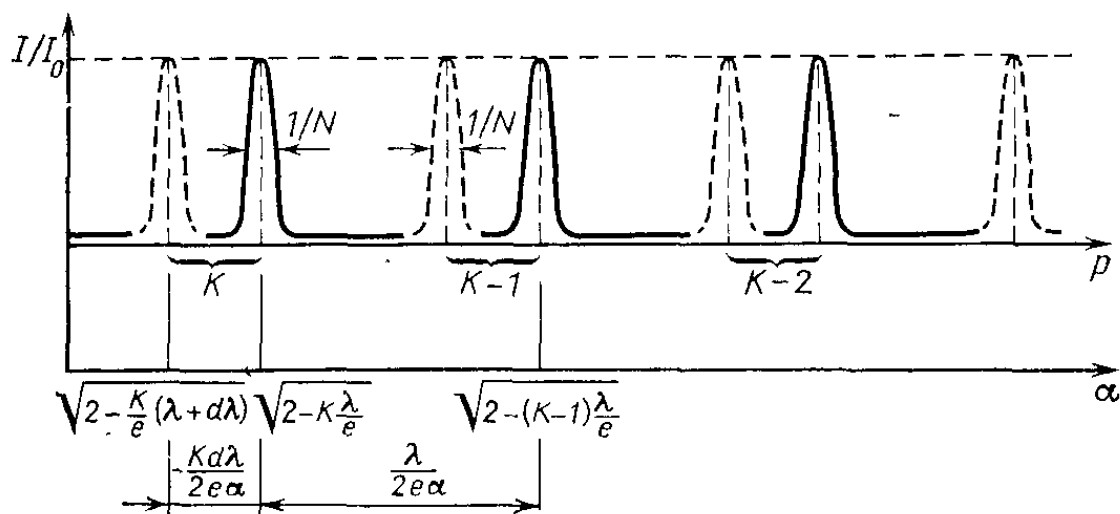
$$\Delta y = -f \frac{\lambda}{2e} \frac{1}{\sqrt{2 - K\lambda/e}}, \quad (17)$$

$$\Delta y = -\frac{1}{y} \frac{f^2 \lambda}{2e} = M_2 M_1. \quad (18)$$



Фиг. 9.6

Кольца сгущаются, если двигаться от центра к периферии (фиг. 9.6). Для длины волны λ кольца порядков K и $K - 1$ пред-



Фиг. 9.7

ставлены сплошными линиями. Для длины волны $\lambda + d\lambda$ соответствующие кольца представлены пунктиром.

Рассмотрим монохроматическую волну длиной λ . Если Δy — расстояние между двумя последующими кольцами, а δy —

ширина колец, то мы имеем

$$N = \frac{\Delta y}{\delta y}. \quad (19)$$

Величина N называется эффективным числом интерферирующих лучей. Ее значение $\pi \sqrt{R}/(1 - R)$ зависит только от коэффициента отражения пластин интерферометра Фабри — Перо.

Если источник испускает две близкие длины волны, λ и $\lambda + d\lambda$, то говорят, что две точки M_1 и M'_1 разрешены, если расстояние $M_1 M'_1 = dy$ больше чем δy (фиг. 9.7):

$$dy \geq \delta y. \quad (20)$$

Объединяя (19) и (20), получаем условие

$$dy \geq \frac{1}{N} \Delta y. \quad (21)$$

Взяв значения dy и Δy из (13) и (17) и используя их в неравенстве (21), получаем

$$\frac{\lambda}{d\lambda} \geq KN = 30K.$$

Разрешающая сила интерферометра Фабри — Перо равна

$$R' = KN. \quad (22)$$

Для длины волны λ_0 самый высокий порядок интерференции находится в центре: $K = 8000$. Находим

$$R' = 30 \cdot 8000 = 24\,000 \approx \frac{R}{2}.$$

Дисперсионные оси интерферометра Фабри — Перо (Oy) и решетки (Ox) пересекаются. Таким образом, исключается всякая неоднозначность в спектральном анализе для случая, когда имеется перекрытие различных порядков интерференции в одной и той же точке оси Oy .

ЗАДАЧА 10

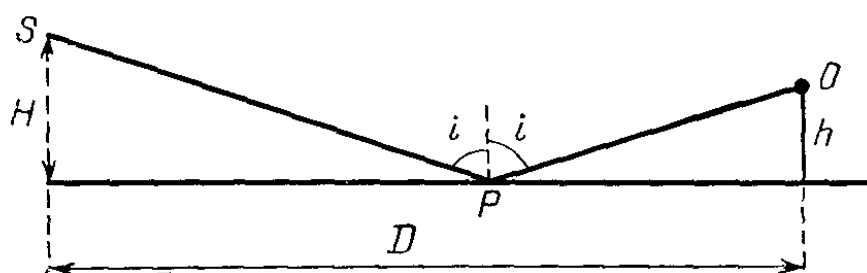
Интерференция радиоволн

Электрические свойства воды Атлантического океана по отношению к радиоволнам характеризуются следующими константами:

$$\epsilon_r = 81, \quad \mu_r = 1, \quad \gamma = 4,3 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}.$$

1. Покажите, что вода может рассматриваться как хороший проводник для частот, меньших 10^8 Гц. Далее в этой задаче мы будем считать, что вода — идеальный проводник.

2. При этих условиях рассмотрите горизонтальную дипольную антенну, расположенную в точке S на высоте H над поверхностью моря и испускающую монохроматические радиоволны длиной λ . Приемник помещается в точке O на высоте h над водой в экваториальной плоскости излучения от антенны и на расстоянии D по горизонтали от нее. Предположим, что D много больше, чем H и h , и что поверхность воды, которая считается плоской, простирается от S до O (фиг. 10.1).



Фиг. 10.1

Найдите изменения электрического поля в зависимости от H , h и λ для данного значения D . Определите минимальное значение h , для которого имеет место оптимальный прием.

Численный пример: $H = 300$ м, $D = 10$ км, $\lambda = 30$ м.

3. Для малых значений h найдите выражение для зависимости интенсивности волны в точке O от D и сравните его с соответствующим выражением, которое справедливо в отсутствие океана. Считая, что волны распространяются параллельно поверхности океана (это справедливо, поскольку H и h малы),

рассчитайте среднюю мощность $\langle \mathcal{D} \rangle$ излучения, которая проходит по направлению нормали через единицу площади поверхности в точке O , как функцию общей средней мощности $\langle \Phi \rangle$, излучаемой диполем.

Численный пример: $H = h = \lambda = 10$ м, $D = 10$ км, $\langle \Phi \rangle = 10$ Вт.

РЕШЕНИЕ

1. Для хорошего проводника ток проводимости превышает ток смещения и мнимая часть комплексного показателя преломления больше, чем действительная. В этом случае отношение этих двух переменных для воды океана равно

$$\frac{\gamma}{\epsilon_0 \epsilon_r \omega} = \frac{6,1 \cdot 10^9}{\omega} \approx \frac{10^9}{\nu}.$$

Таким образом, эта вода является проводником, который не пропускает частоты $\nu < 10^9$ Гц ($\lambda = 0,3$ м) и хорошо пропускает частоту $\nu = 10^8$ Гц.

2. Антенна принимает волну, распространяющуюся вдоль SO , и волну, отраженную в точке P поверхностью воды (которая ведет себя как идеальное зеркало), под углом, близким к $\pi/2$, так как $D \gg H$ (здесь $i \approx 88^\circ 15'$). Коэффициент отражения практически равен единице. Электрическое поле волн горизонтально, и при отражении происходит фазовый сдвиг π , в результате чего тангенциальная компонента электрического поля равна нулю на поверхности проводника.

Разность хода волн, поступающих в точку O , равна $SPO - SO$:

$$SO = \sqrt{D^2 + (H - h)^2} \approx D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H - h}{D} \right)^2 \right],$$

$$SPO = \sqrt{D^2 + (H + h)^2} \approx D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H + h}{D} \right)^2 \right],$$

так что

$$\delta = SPO - SO = \frac{2Hh}{D},$$

и разность фаз в точке O равна

$$\Phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \pi = \frac{4\pi Hh}{\lambda D} + \pi.$$

Ни малая разность хода, ни предполагаемое полное отражение не вызывают никакого заметного различия в амплитуде (которая изменяется как $1/r$) у прямой и отраженной волн. Так как

эти поля параллельны, то результирующее поле определяется выражением

$$\frac{E_0}{D} \cos \omega t + \frac{E_0}{D} \cos (\omega t + \varphi) = -\frac{2E_0}{D} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi Hh}{\lambda D} \right) \sin \frac{2\pi Hh}{\lambda D}. \quad (1)$$

Тогда в каждое мгновение на вертикали в точке O мы получаем ряд максимумов и минимумов в значениях амплитуды. На поверхности воды ($h = 0$) находится минимум, равный нулю. Первый максимум имеет место на высоте $h_1 = \lambda D/4H$.

Численный пример:

$$h_1 = \frac{30 \cdot 10^4}{4 \cdot 300} = 250 \text{ м.}$$

3. Для $h \ll h_1$ можно заменить $\sin 2\pi Hh/\lambda D$ значением угла. Тогда амплитуда электрического поля в точке O будет пропорциональна $1/D^2$, а интенсивность результирующей волны пропорциональна $1/D^4$, тогда как интенсивность прямой волны изменяется как $1/D^2$.

Мощность $\langle \mathcal{D} \rangle$ определяется выражением

$$\langle \mathcal{D} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_m^2, \quad (2)$$

где E_m представляет собой амплитуду (1), так что

$$E \approx E_0 \frac{4\pi Hh}{\lambda D^2}. \quad (3)$$

Поле E_0/D , создаваемое дипольной антенной на расстоянии D в ее экваториальной плоскости, имеет амплитуду (при $\theta = \pi/2$)

$$\frac{E_0}{D} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega_0^2 dm}{D}. \quad (4)$$

С другой стороны, суммарная средняя мощность $\langle \Phi \rangle$, излучаемая синусоидальным диполем, дается уравнением

$$\langle \Phi \rangle = \frac{\omega_0^4 d^2 m}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{4}{3} \pi \epsilon_0 c E_0^2. \quad (5)$$

Используя (2) — (5), получаем

$$\langle \mathcal{D} \rangle = 6\pi \frac{H^2 h^2}{\lambda^2 D^4} \langle \Phi \rangle.$$

Численный пример:

$$\langle \mathcal{D} \rangle = 6\pi \cdot 10^{-8} \approx 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ Вт.}$$

ЗАДАЧА 11

Формулы Френеля

I

Уравнения Френеля определяют коэффициенты отражения света в предположении, что магнитные проницаемости μ_1 и μ_2 диэлектрика равны магнитной проницаемости вакуума μ_0 . Что произойдет с этими уравнениями, если не принимать такого предположения?

II

Рассмотрите возможность появления линейной поляризации отраженного света вследствие отражения, если μ_1 и μ_2 отличны от μ_0 .

III

Покажите, что для диэлектрика в вакууме, где относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r равна относительной магнитной проницаемости μ_r , при нормальном падении света коэффициент отражения равен нулю.

РЕШЕНИЕ

I

Уравнения Максвелла для плоской волны дают следующее общее выражение, связывающее магнитное поле H с электрическим полем E :

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E.$$

При отражении и преломлении света на поверхности между двумя прозрачными средами уравнение непрерывности для компоненты электрического поля, нормальной к плоскости падения, имеет вид (фиг. 11.1)

$$E_i + E_r = E_t, \text{ следовательно, } 1 + r = t;$$

$$(H_i - H_r) \cos i_1 = H_t \cos i_2, \text{ откуда } \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (1 - r) \cos i_1 = \\ = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} t \cos i_2.$$

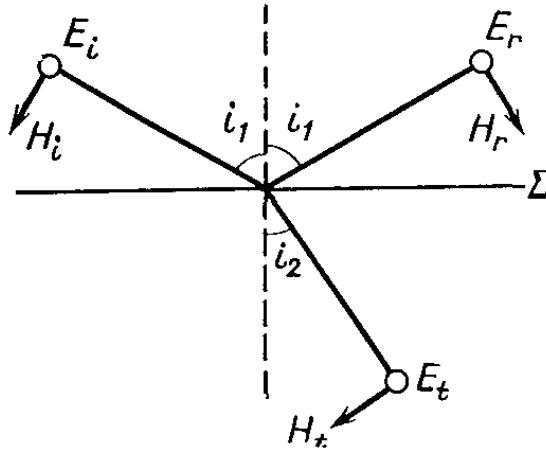
Выведенный коэффициент отражения $r_{\perp}$ равен

$$r_{\perp} = \frac{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos i_1 - \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos i_2}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos i_1 + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos i_2} \quad (1)$$

и коэффициент пропускания $t_{\perp}$ равен

$$t_{\perp} = \frac{2 \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos i_1}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos i_1 + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos i_2}.$$

Фиг. 11.1



Находим выражения для коэффициентов в случае, когда поля E находятся в плоскости падения

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{\sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos i_1 - \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos i_2}{\sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos i_1 + \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos i_2}, \\ t_{\parallel} &= \frac{2 \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos i_1}{\sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos i_1 + \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos i_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

II

Падение под углом Брюстера приводит к исчезновению $r_{\parallel}$. Это условие осуществляется при использовании выражений (2), где

$$\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos i_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos i_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \sqrt{1 - \sin^2 i_2}.$$

Используя закон преломления

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}$$

и выражая $\sin i_1$ и $\cos i_1$ через $\tan i_1$, находим

$$\tan i_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2 (\epsilon_2 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_2)}{\epsilon_1 (\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1)}}.$$

При $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ получаем

$$\operatorname{tg} i_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1},$$

что является обычным выражением для угла Брюстера.

Из уравнения (1) видно, что при принятых предположениях $r_{\perp}$ также может обратиться в нуль. Поступая как и раньше, находим, что это происходит при таком угле i'_B , когда

$$\operatorname{tg} i'_B = \sqrt{\frac{\mu_2 (\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2)}{\mu_1 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)}}.$$

При обычных условиях, когда $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, имеем $\operatorname{tg} i'_B = \sqrt{-1}$. Для колебания, перпендикулярного плоскости падения, угла Брюстера не существует.

III

В случае нормального падения уравнения (1) и (2) принимают вид

$$r_{\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}} = -r_{\parallel}. \quad (3)$$

Так как $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ и $\mu = \mu_0 \mu_r$, а $\varepsilon_r = \mu_r$, то $r = 0$. Заметим, что отношение $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ является полным сопротивлением среды. Реализация уравнения (3) на поверхности раздела двух сред эквивалентна ситуации при распространении радиоволн, когда имеется согласование импедансов при соединении двух линий передачи.

ЗАДАЧА 12

Формулы Френеля. Тонкие пленки

1. Исходя из формул Френеля для отражения света от стекла при нормальном падении, покажите, что амплитудные коэффициенты отражения r и r' при отражении от поверхности в обоих направлениях удовлетворяют равенству $r = -r'$ и соответствующие коэффициенты пропускания t и t' удовлетворяют равенству $tt' = 1 - r^2$.

2. Слой прозрачного вещества с показателем преломления n_1 , параллельными гранями и толщиной e покрывает стеклянную поверхность с показателем преломления n_2 . Его верхняя грань находится в контакте с воздухом, показатель преломления которого принимается равным единице. Плоская монохроматическая волна, имеющая длину λ в воздухе и единичную амплитуду, пересекает слой со стороны воздуха при нормальном паде-

нии. Покажите, что интенсивность отраженной волны с учетом многократного отражения определяется выражением

$$R = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \varphi}{1 + r_1^2r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \varphi},$$

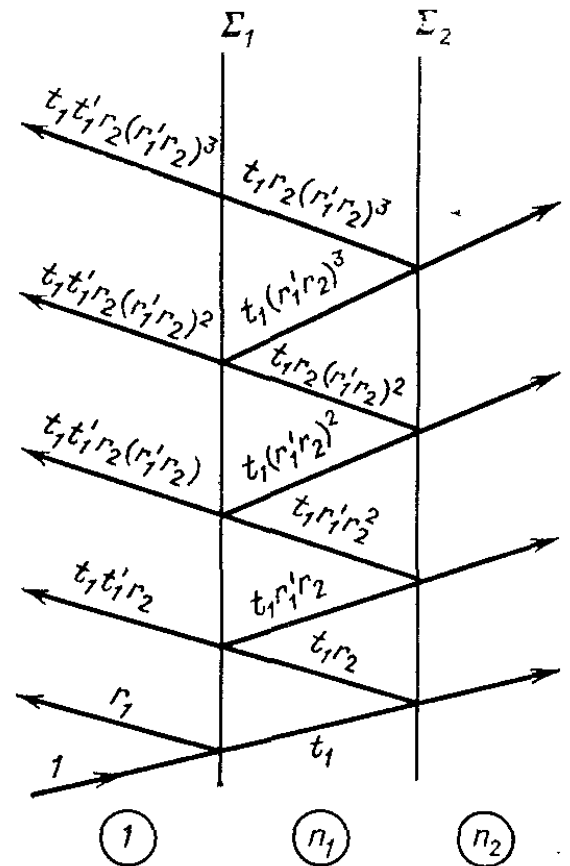
где r_1 и r_2 — коэффициенты отражения света для переходов воздух — слой и слой — стекло соответственно, а φ — разность фаз между двумя последующими отраженными лучами.

3. Покажите, что если $1 < n_1 < n_2$, то коэффициент пропускания среды слой + стекло всегда больше, чем коэффициент пропускания только стекла для любой толщины слоя e . В случае, когда $n_1 = 1,35$ и $n_2 = 1,50$, покажите, насколько уменьшится коэффициент отражения R (по интенсивности) по сравнению с коэффициентом отражения одного стекла, если нанести слой оптимальной толщины.

Почему из возможных значений оптимальной толщины слоя для длины волны λ выбирается только наименьшее?

4. Покажите, что если $n_1 > n_2$, то коэффициент отражения стекла увеличивается. Для какой толщины значение R максимально? Сделайте расчет для $n_1 = 2,30$.

5. Укажите преимущества и недостатки частично отражающих металлических и диэлектрических пленок.



Фиг. 12.1

РЕШЕНИЕ

1. Формулы Френеля имеют вид

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad r' = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \rightarrow r = -r'. \quad (1)$$

Непрерывность компоненты электрического поля для случая нормального падения требует выполнения равенства $1 + r = t$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad t' = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \rightarrow tt' = 1 - r^2. \quad (2)$$

2. Коэффициент отражения. Он может быть найден методом, используемым в задаче 14. В этом случае нужно учитывать многократные отражения (фиг. 12.1).

Чтобы получить амплитуду отраженного света, можно просуммировать амплитуды последующих лучей либо в воздухе, либо в веществе с показателем преломления n_1 . Электрическое поле имеет одно и то же значение с каждой стороны Σ_1 на поверхности раздела двух сред.

$$\begin{array}{cc} \text{Среда с показателем} & \text{Среда с показателем} \\ \text{преломления } 1 & \text{преломления } n_1 \\ E = E_i + E_r = & E_t. \end{array} \quad (3)$$

Обозначим через φ сдвиг фазы, производимый двойным прохождением через вещество:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2n_1e;$$

если $r < 1$, то всегда имеем $r^N \rightarrow 0$ (N — число отражений). Значение результирующего поля в воздухе равно

$$\begin{aligned} E &= 1 + r_1 + t_1 t'_1 r_2 e^{-j\varphi} [1 + r'_1 r_2 e^{-j\varphi} + \dots] = \\ &= 1 + r_1 + \frac{t_1 t'_1 r_2 e^{-j\varphi}}{1 - r'_1 r_2 e^{-j\varphi}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Значение результирующего поля в веществе есть

$$\begin{aligned} E &= t_1 [1 + r'_1 r_2 e^{-j\varphi} + \dots] + t_1 r_2 e^{-j\varphi} [1 + r'_1 r_2 e^{-j\varphi} + \dots] = \\ &= \frac{t_1 [1 + r_2 e^{-j\varphi}]}{1 - r'_1 r_2 e^{-j\varphi}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Можно легко убедиться в том, что уравнения (4) и (5) идентичны, так как $1 + r_1 = t_1$.

Принимая $E = E_i + E_r = 1 + r$ и используя (1) и (2), можно из (4) сразу получить амплитуду отраженного света:

$$r = r_1 + \frac{(1 - r_1^2) r_2 e^{-j\varphi}}{1 + r_1 r_2 e^{-j\varphi}}. \quad (6)$$

Значение энергии отраженного света $R = |r|^2$ дается в тексте задачи.

Примечание. В качестве следующего упражнения можно заменить амплитуды r_1 и r_2 их значениями из формул Френеля и проверить уравнение (6) в этой задаче и уравнение (28) в задаче 14.

3. $1 < n_1 < n_2$. Покрытие поверхности может только увеличить коэффициент пропускания. Действительно,

а) Пленка на поверхности:

$$R_{\text{с покр}} = R_{\text{мин}}, \text{ если } \varphi = (2k + 1)\pi \text{ или } n_1 e = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{4},$$

$$R = \left(\frac{r_1 - r_2}{1 - r_1 r_2} \right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1^2}{n_2 + n_1^2} \right)^2.$$

Численный пример:

$$R = \left[\frac{1,50 - (1,35)^2}{1,50 + (1,35)^2} \right]^2 = \left[\frac{-0,32}{3,32} \right]^2 \approx 0,01.$$

Условие $n_1 e = (2k + 1) \lambda_0 / 4$ приблизительно выполняется для длин волн вблизи λ_0 и выполняется в более широкой области, если k мало. Этим обусловлен выбор $k = 0$.

б) Стекло без покрытия: $R_{\text{макс}} = R_{\text{без покр}}$, если $\varphi = 2k\pi$ (или $n_1 e = k \lambda_0 / 2$):

$$R = \left(\frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - 1,5}{1 + 1,5} \right)^2 = 0,04.$$

4. $1 < n > n_2$. Покрытие поверхности может только увеличить коэффициент отражения:

а) $R_{\text{с покр}} = R_{\text{макс}}$, если $\varphi = (2k + 1)\pi$ или $n_1 e = (2k + 1) \lambda_0 / 4$,

$$R = \left(\frac{r_1 - r_2}{1 - r_1 r_2} \right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_1^2}{n_2 + n_1^2} \right)^2;$$

б) $R_{\text{без покр}} = \left(\frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right)^2.$

Численный пример:

$$R_{\text{с покр}} = \left[\frac{1,50 - (2,3)^2}{1,50 + (2,3)^2} \right]^2 = \left(\frac{3,8}{6,8} \right)^2 = 0,31,$$

$$R_{\text{без покр}} = 0,04.$$

5. Металлические пленки поглощают. Диэлектрические пленки селективны.

ЗАДАЧА 13

Кольца Ньютона в поляризованном свете

Кольца Ньютона образуются между плоско-выпуклой стеклянной линзой с большим радиусом кривизны и показателем преломления n_1 и стеклянной пластинкой, показатель преломления которой n_2 значительно отличается от n_1 . Лучи в падающем

свете параллельны, и свет линейно поляризован. Качественно опишите влияние изменения угла падения на видность колец:

1. Если колебания параллельны плоскости падения.
2. Если колебания перпендикулярны плоскости падения.

РЕШЕНИЕ

1. Интенсивность проходящего света, пересекающего верхнюю грань линзы, равномерно увеличивается с ростом угла падения. Амплитуда света, отраженного от нижней грани, обращается в нуль при таком угле падения i_1 , при котором $\operatorname{tg} i_1 = n_1$. В этом случае для лучей, отраженных от стеклянной пластинки, интерференция не может больше наблюдаться и кольца пропадают. Они также исчезают при таком угле падения i_2 , при котором $\operatorname{tg} i_2 = n_2$; при этом лучи больше не отражаются от стеклянной пластинки.

2. Видность подвергается некоторым небольшим малоинтересным изменениям, но никогда не обращается в нуль.

ЗАДАЧА 14

Распространение волн в слоистой диэлектрической среде

I

Монохроматическая плоская волна, амплитуда которой может быть принята равной единице, падает перпендикулярно плоской поверхности, разделяющей две прозрачные среды с показателями преломления n_1 и n_2 .

1. Выведите формулы Френеля, определяющие амплитуду проходящего света t и амплитуду отраженного света r .

Численный пример: $n_1 = 1$, $n_2 = 1,5$.

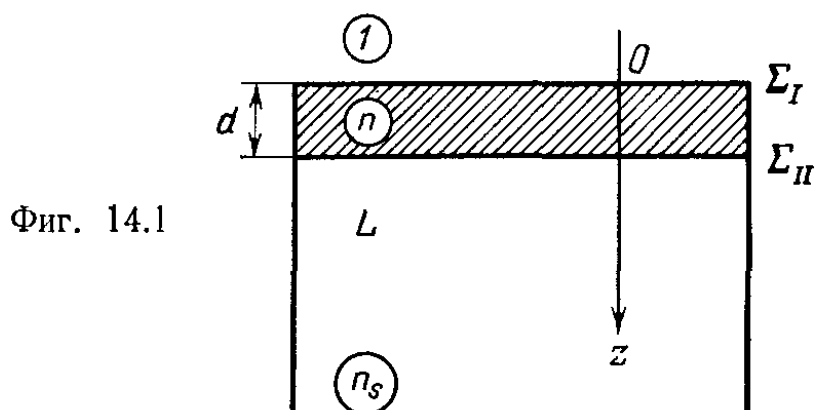
2. Используя закон сохранения энергии, напишите выражение, которое связывает r и t .

II

Рассмотрим тонкую пленку из прозрачного вещества с показателем преломления n и толщиной d , нанесенную на подложку, образованную плоской стеклянной пластинкой L с показателем преломления $n_s > n$. Толщина стекла настолько велика, что ее можно считать бесконечной. Такая система является «пластинкой с покрытием» (фиг. 14.1). Плоская монохроматическая волна (с длиной λ_0 в вакууме), распространяющаяся в направлении Oz , падает по нормали к пластинке с покрытием.

1. Напишите уравнение непрерывности для компонент электрического и магнитного полей на поверхностях Σ_I (воздух — пленка) и Σ_{II} (пленка — стекло). Какое выражение связывает компоненты E и H до и после пересечения светом тонкой пленки? Покажите, что эта тонкая пленка может быть охарактеризована квадратной матрицей, состоящей из четырех элементов. Будем считать, что $q = \sqrt{\epsilon/\mu_0}$.

2. Определите в зависимости от показателей преломления n_s , n и толщины d следующие характеристики пластинки с покры-



тием: амплитуду проходящего света t , амплитуду отраженного света r , коэффициент пропускания T , коэффициент отражения R .

3. Какие значения должны иметь толщина и показатель преломления пленки, чтобы поверхность с покрытием была неотражающей?

Численный пример: $n_s = 1,60$; $\lambda_0 = 0,5$ мкм.

III

Рассмотрим теперь систему из p тонких пленок, характеризующихся:

относительными толщинами $d_1, d_2, \dots, d_p$ и показателями преломления $n_1, n_2, \dots, n_p$.

В этом случае применяется такое же освещение, как и прежде.

1. Определите характеристическую матрицу для этой слоистой среды. Выведите выражение для амплитуд проходящего и отраженного света в случае системы из p пленок.

2. Можно сделать зеркало, используя систему тонких пленок, с попеременно высокими и низкими показателями преломления (пленки в контакте с воздухом имеют высокий показатель преломления). Обозначим показатели преломления этих пленок через n_h (высокий) и n_l (низкий). Будем считать, что все пленки имеют одинаковую оптическую толщину $\lambda_0/4$. Обоснуйте такой выбор толщины.

а) Определите характеристическую матрицу для одного периода (две пленки), для $2p$ пленок и для $(2p + 1)$ пленок.

б) Вычислите коэффициент отражения R зеркала, имеющего $2p$ и $(2p + 1)$ пленок.

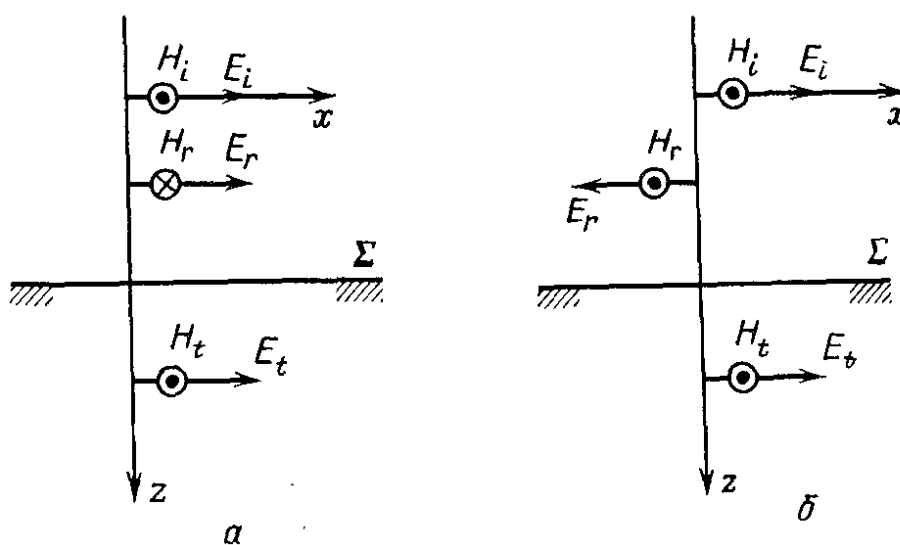
Численный пример: $n_0 = 1$; $n_h = 2,3$ (сульфид цинка); $n_l = 1,38$ (фтористый магний); $n_s = 1,52$ (стеклянная подложка). Число пленок 1, 2, ..., 11. Напомним, что элементы (c_{ij}) матрицы $[C]$, равной произведению матриц $[A]$ и $[B]$, получаются из следующего уравнения:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

РЕШЕНИЕ

I. Отражение от стекла. Формулы Френеля

1. Нет необходимости проводить различие между параллельным и перпендикулярным колебаниями в плоскости падения. Действительно, для случая нормального падения все плоскости, через которые проходят лучи, являются плоскостями падения (фиг. 14.2).



Фиг. 14.2

Возьмем поля E_i и H_i падающего света, ориентированные, как показано на фиг. 14.2. Направление полей проходящего света остается прежним. Для полей отраженного света существует выбор между ориентациями, представленными на фиг. 14.2, а и б. Произвольно рассмотрим случай фиг. 14.2, а. Компоненты электрического и магнитного полей удовлетворяют условиям непрерывности на поверхности раздела:

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E_t, \\ H_i - H_r &= H_t. \end{aligned} \quad (1)$$

Между полями E и H каждой синусоидальной плоской волны существуют соотношения

$$\begin{aligned}\frac{H_i}{E_i} &= \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} = \frac{H_r}{E_r}, \\ \frac{H_t}{E_t} &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}}.\end{aligned}\quad (2)$$

Для диэлектрической среды $\mu_1 = \mu_0$, и мы имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} &= n_1 = \frac{c}{v_1}, \\ \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}} &= n_2 = \frac{c}{v_2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Исключая H из уравнений (1) и (2), получаем формулы Френеля

$$\begin{aligned}r &= \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - n}{1 + n} \quad \text{с} \quad n = \frac{n_2}{n_1}; \\ t &= \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n}.\end{aligned}\quad (4)$$

Примечания:

а) величина t всегда положительна; E_t и E_i имеют одно и то же направление;

б) r имеет знак разности $(n_1 - n_2)$,

если $n_1 > n_2$, то $r > 0$ (фиг. 14.2, а),

если $n_1 < n_2$, то $r < 0$ (фиг. 14.2, б).

Численный пример:

$$\begin{aligned}r &= \frac{1 - 1,5}{1 + 1,5} = -\frac{0,5}{2,5} = -0,20, \\ t &= \frac{2}{2,5} = 0,8.\end{aligned}$$

В случае когда отражение происходит в менее преломляющей среде от границы с более преломляющей средой, электрическое поле получает сдвиг фазы на π .

2. Сохранение энергии. Плотность электромагнитной энергии есть

$$w = \epsilon E^2 = \mu_0 H^2, \quad (5)$$

отсюда энергия, содержащаяся в объеме $d\tau$, равна

$$dW = \epsilon E^2 d\tau. \quad (6)$$

Количество энергии, проходящее за время dt через элемент поверхности, параллельный плоскости фронта волны, есть то количество энергии, которое заключается за время t в цилиндре с

основанием dS и высотой $v dt$ (где v — скорость распространения волны в среде).

Уравнение (6) может быть переписано в виде

$$dW = \epsilon E^2 dS \cdot v \cdot dt. \quad (7)$$

Тогда поток излучаемой энергии, проходящий через поверхность dS , равен

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = \epsilon v E^2 dS. \quad (8)$$

Закон сохранения энергии для потока записывается как

$$d\Phi_i = d\Phi_r + d\Phi_t. \quad (9)$$

После упрощения имеем

$$v_1 \epsilon_1 E_i^2 = v_1 \epsilon_1 E_r^2 + v_2 \epsilon_2 E_t^2. \quad (10)$$

Разделив обе части уравнения на E_i^2 и используя определение t и r , получаем

$$1 = r^2 + nt^2. \quad (11)$$

Это выражение можно было бы найти непосредственно, используя формулы Френеля (4).

Примечание. В случае нормального падения света величины r и t связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 + r &= t, \\ 1 &= r^2 + nt^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Для энергии имеем

$$1 = R + T. \quad (13)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} R &= r^2, \\ T &= nt^2 \neq t^2. \end{aligned} \quad (14)$$

В действительности, если отраженный луч распространяется в той же среде, что и падающий луч, то он отличается от проходящего луча: *в общем случае энергия проходящего света не равна квадрату амплитуды проходящего света.*

II. Просветляющие покрытия

1. *Условия непрерывности.* Поля E и H являются результатом действия двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Примем

$$\begin{aligned} E &= E^+ + E^-, \\ H &= H^+ + H^-. \end{aligned} \quad (15)$$

Индексом плюс обозначена волна, идущая в положительном направлении Oz , индексом минус — волна, идущая в противоположном направлении.

Второе уравнение (15) может быть переписано с использованием (2):

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E^+ - E^-) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} (E^+ - E^-) = q (E^+ - E^-). \quad (16)$$

Если A и B — амплитуды луча внутри пленки, то, принимая $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, имеем

$$\begin{aligned} E_{\text{пленки}} &= Ae^{-ik_0nz} + Be^{+ik_0nz}, \\ H_{\text{пленки}} &= q[Ae^{-ik_0nz} - Be^{+ik_0nz}]. \end{aligned} \quad (17)$$

При переходе от одной среды к другой уравнения Максвелла требуют непрерывности тангенциальных компонент векторов поля. В особом случае нормального падения векторы E и H , перпендикулярные Oz , должны оставаться непрерывными.

Тогда на поверхностях Σ_I и Σ_{II} имеем

$$\text{на } \Sigma_I \begin{cases} E_I = A + B, \\ H_I = q(A - B), \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{на } \Sigma_{II} \begin{cases} E_{II} = Ae^{-ik_0nd} + Be^{+ik_0nd}, \\ H_{II} = q[Ae^{-ik_0nd} - Be^{+ik_0nd}]. \end{cases} \quad (19)$$

Исключая A и B из уравнений (18) и (19), получаем

$$E_{II} = \frac{1}{2q} [(qE_I + H_I)e^{-ik_0nd} + (qE_I - H_I)e^{+ik_0nd}],$$

$$H_{II} = \frac{1}{2} [(qE_I + H_I)e^{-ik_0nd} - (qE_I - H_I)e^{+ik_0nd}].$$

Мы приходим к следующим линейным соотношениям:

$$E_{II} = E_I \cos k_0nd - \frac{j}{q} H_I \sin k_0nd,$$

$$H_{II} = -jqE_I \sin k_0nd + H_I \cos k_0nd.$$

Кроме того,

$$E_I = E_{II} \cos k_0nd + \frac{j}{q} H_{II} \sin k_0nd, \quad (20)$$

$$H_I = jqE_{II} \sin k_0nd + H_{II} \cos k_0nd$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 nd & \frac{j}{q} \sin k_0 nd \\ jq \sin k_0 nd & \cos k_0 nd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix} = [M_I] \begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Матрица $[M_I]$ характеризует пленку. Это унимодулярная матрица, детерминант которой равен единице.

2. В вакууме для поверхности Σ_I уравнения (15) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} E_I &= E_i + E_r, \\ H_I &= q_0(E_i - E_r). \end{aligned} \quad (22)$$

В подложке, имеющей по предположению бесконечную толщину, волны в отрицательном направлении не распространяются. На поверхности Σ_{II} компоненты поля равны

$$\begin{aligned} E_{II} &= E_t, \\ H_{II} &= H_t = q_s E_t. \end{aligned} \quad (23)$$

При использовании уравнений (22) и (23) уравнение (20) принимает вид

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E_t \left[\cos k_0 nd + j \frac{q_s}{q} \sin k_0 nd \right], \\ q_0(E_i - E_r) &= E_t [jq \sin k_0 nd + q_s \cos k_0 nd], \end{aligned} \quad (24)$$

отсюда получаем:

а) Амплитуда проходящего света:

$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2q_0 q}{q(q_0 + q_s) \cos k_0 nd + j(q^2 + q_0 q_s) \sin k_0 nd}, \quad (25)$$

$$t = \frac{2}{(1 + n_s) \cos k_0 nd + j[n + (n_s/n)] \sin k_0 nd}. \quad (26)$$

б) Амплитуда отраженного света:

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{q(q_0 - q_s) \cos k_0 nd + j(q_0 q_s - q^2) \sin k_0 nd}{q(q_0 + q_s) \cos k_0 nd + j(q_0 q_s + q^2) \sin k_0 nd}, \quad (27)$$

$$r = \frac{(1 - n_s) \cos k_0 nd + j[(n_s/n) - n] \sin k_0 nd}{(1 + n_s) \cos k_0 nd + j[(n_s/n) + n] \sin k_0 nd}. \quad (28)$$

в) Коэффициент пропускания:

$$T = \frac{q_s}{q_0} |t|^2 = \frac{q_s}{q_0} t t^* = \frac{n_s}{n} t t^*. \quad (29)$$

Так как внешние среды не идентичны, то $T \neq t^2$. Уравнение (25) позволяет написать

$$T = \frac{4q_0 q_s q^2}{q^2 (q_0 + q_s)^2 \cos^2 k_0 n d + (q^2 + q_0 q_s)^2 \sin^2 k_0 n d}, \quad (30)$$

$$T = \frac{4q_0 q_s q^2}{q^2 (q_0 + q_s)^2 + (q^2 - q_0^2)(q^2 - q_s^2) \sin^2 k_0 n d}, \quad (31)$$

или, наконец, через показатели преломления

$$T = \frac{4n_s}{(1 + n_s)^2 + (n^2 - 1)[1 - (n_s/n)^2] \sin^2 k_0 n d}. \quad (32)$$

г) Коэффициент отражения

$$R = 1 - T = \frac{(1 - n_s)^2 + (n^2 - 1)[1 - (n_s/n)^2] \sin^2 k_0 n d}{(1 + n_s)^2 + (n^2 - 1)[1 - (n_s/n)^2] \sin^2 k_0 n d}. \quad (33)$$

3. Вернемся к уравнению (32). Так как $1 < n < n_s$, то второй член в знаменателе D всегда отрицателен. Чтобы T было максимальным, D должно быть минимальным, т. е. значение $\sin k_0 n d$ должно быть максимальным, или, наконец,

$$n d = \frac{\lambda_0}{4}. \quad (34)$$

Для этой оптической толщины покрытия поверхности коэффициент пропускания будет

$$T = \frac{4n^2 n_s}{n^2 (1 + n_s)^2 + (n^2 - 1)(n^2 - n_s^2)} = \frac{4n^2 n_s}{(n^2 + n_s)^2}. \quad (35)$$

Это значение максимально для

$$n^2 = n_s. \quad (36)$$

Заключение. Пластика с покрытием будет идеально прозрачной, если толщина и показатель преломления пленки удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{n_s}, \\ n d &= \frac{\lambda_0}{4}. \end{aligned} \quad (37)$$

Численный пример:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{1,6} = 1,265, \\ d &= \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{0,5}{5,06} \approx 0,1 \text{ мкм.} \end{aligned}$$

Примечание. Не существует твердого тела с показателем преломления меньше чем 1,3. Путем нанесения единственной пленки нельзя получить идеального просветляющего покрытия, но можно добиться лишь хорошего приближения к нему.

III. Многослойные диэлектрические покрытия

1. Записывая уравнения непрерывности на поверхностях Σ_{II} и Σ_{III} , получаем

$$\begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 n_2 d_2 & \frac{j}{q^2} \sin k_0 n_2 d_2 \\ j q_2 \sin k_0 d_2 & \cos k_0 n_2 d_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_{III} \\ H_{III} \end{bmatrix} = \\ = [M_2] \times \begin{bmatrix} E_{III} \\ H_{III} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Используя уравнения (21), можно написать

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = [M_1] \times [M_2] \times \begin{bmatrix} E_{III} \\ H_{III} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Отсюда следует, что соотношения между E_I и H_I (значения E и H на плоскости $z = 0$) и E_{p+1} и H_{p+1} (значения E и H на плоскости $z = d_1 + d_2 + \dots + d_p$) равны

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = [M_1] \times [M_2] \times \dots \times [M_p] \times \begin{bmatrix} E_{p+1} \\ H_{p+1} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

или, наконец,

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = [M] \times \begin{bmatrix} E_{p+1} \\ H_{p+1} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Для системы p тонких пленок, характеристические матрицы которых $[M_i]$, имеем

$$[M] = \prod_{i=1}^p [M_i]. \quad (42)$$

Примечание. Матричное произведение не коммутативно. Произведение следует брать в той последовательности, в которой падающая волна падает на пленки.

$[M]$ — всегда унимодулярная матрица. Это свойство является результатом сохранения энергии, переносимой электромагнитной волной.

Уравнение (40) может быть переписано в виде

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{p+1} \\ H_{p+1} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Амплитуда проходящего света t . Уравнение (22) остается неизменным. Уравнение (23) принимает вид

$$\begin{aligned} E_{p+1} &= E_t, \\ H_{p+1} &= H_t = q_s E_t. \end{aligned} \quad (44)$$

Объединяя (22), (43) и (44), можно написать

$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2q_0}{q_0(m_{11} + q_s m_{12}) + (m_{21} + q_s m_{22})}. \quad (45)$$

Амплитуда отраженного света r . Таким же образом, как и раньше, получаем

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{q_0(m_{11} + q_s m_{12}) - (m_{21} + q_s m_{22})}{q_0(m_{11} + q_s m_{12}) + (m_{21} + q_s m_{22})}. \quad (46)$$

2. а) *Характеристические матрицы.* Так как мы имеем пленки в четверть длины волны ($\lambda_0/4$), то матрицы $[M_1]$ и $[M_2]$ принимают вид

$$[M_h] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{j}{q_h} \\ jq_h & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$[M_l] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{j}{q_l} \\ jq_l & 0 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Характеристическая матрица для одного периода равна

$$[M_{1 \text{ период или 2 пленки}}] = \begin{bmatrix} -\frac{q_l}{q_h} & 0 \\ 0 & -\frac{q_h}{q_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{n_l}{n_h} & 0 \\ 0 & -\frac{n_h}{n_l} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Для p периодов получаем

$$[M_{p \text{ периодов или } 2p \text{ пленок}}] = \begin{bmatrix} \left(-\frac{n_l}{n_h}\right)^p & 0 \\ 0 & \left(-\frac{n_h}{n_l}\right)^p \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Для $(2p+1)$ характеристическая матрица равна

$$[M_{(2p+1) \text{ пленок}}] = [M_{2p \text{ пленок}}] \times [M_h], \quad (51)$$

$$[M_{(2p+1) \text{ пленок}}] = \begin{bmatrix} \left(-\frac{n_l}{n_h}\right)^p & 0 \\ 0 & \left(-\frac{n_h}{n_l}\right)^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{j}{q_h} \\ jq_h & 0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

$$[M_{(2p+1) \text{ пленок}}] = \begin{bmatrix} 0 & \left(-\frac{n_l}{n_h}\right)^p \frac{j}{q_h} \\ \left(-\frac{n_h}{n_l}\right)^p jq_h & 0 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

б) Расчет коэффициента отражения $R = |r|^2$. Вернемся к уравнению (46), дающему r , и заменим элементы m элементами матриц (50) или (53).

Случай $2p$ пленок:

$$r_{2p} = \frac{q_0 (-n_l/n_h)^p - q_s (-n_h/n_l)^p}{q_0 (-n_l/n_h)^p + q_s (-n_h/n_l)^p}, \quad (54)$$

следовательно,

$$R_{2p} = \left[\frac{1 - (n_s/n_0) (n_h/n_l)^{2p}}{1 + (n_s/n_0) (n_h/n_l)^{2p}} \right]^2. \quad (55)$$

Случай $(2p + 1)$ пленок:

$$r_{2p+1} = \frac{q_0 q_s (-n_l/n_h)^p 1/q_h - (-n_h/n_l)^p q_h}{q_0 q_s (-n_l/n_h)^p 1/q_h + (-n_h/n_l)^p q_h}, \quad (56)$$

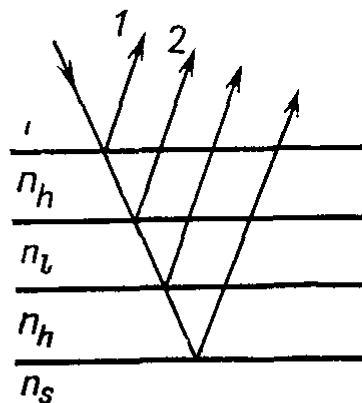
$$R_{2p+1} = \left[\frac{1 - (n_h/n_l)^{2p} (n_h^2/n_0 n_s)}{1 + (n_h/n_l)^{2p} (n_h^2/n_0 n_s)} \right]^2. \quad (57)$$

Численный пример приводится в табл. 14.1. Пленки не поглощают, и $R + T = 1$.

Таблица 14.1

Число пленок	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T	0,693	0,619	0,340	0,289	0,138	0,116	0,0522	0,0432	0,0191	0,0158	0,0069
R	0,307	0,381	0,660	0,711	0,862	0,884	0,9478	0,9568	0,9809	0,9842	0,9931

Примечание. Выбор $\lambda_0/4$ как оптимальной толщины для пленок может быть легко объяснен (фиг. 14.3). Если два после-



Фиг. 14.3

дующих отражения являются отражениями разного типа, то два отраженных луча имеют разность хода $2nd + \lambda_0/2$.

Чтобы эти лучи создавали интерференционную картину, требуется выполнение условия $nd = \lambda_0/4$. Следовательно,

$$n_h d_h = \frac{\lambda_0}{4} \quad \text{и} \quad n_l d_l = \frac{\lambda_0}{4}.$$

Необходимо, чтобы отражения, испытываемые лучами 1 и 2, были различного типа, так же как и отражения, испытываемые последними двумя лучами. Иными словами, необходимо иметь нечетное число пленок, где сульфид цинка находится в контакте с воздухом с одной стороны и со стеклом — с другой.

В современном интерферометре Фабри — Перо на внешние грани наносятся многослойные диэлектрические покрытия. Заметим, что селективность увеличивается с числом пленок.

ЗАДАЧА 15

Электромагнитные волны в резонаторе

Пусть резонатор имеет форму куба, одна из вершин которого находится в точке O , а три стороны ориентированы вдоль осей Ox , Oy и Oz правильного тетраэдра. Резонатор откачивается, и мы считаем, что стенки идеально проводят.

I

Создадим в резонаторе электромагнитное поле с частотой ν ; при этом возбуждение создает электрическое поле, параллельное оси Oz . Исходя из уравнения для электромагнитной волны и условий, налагаемых на волновое поле на стенках, покажите, что можно получить стационарные состояния, в которых поле E параллельно оси Oz и имеет значение, не зависящее от z , для которого существует соотношение между длиной резонатора L и длиной волны λ_0 в вакууме для плоской волны с частотой ν . Примем

$$E_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Определите минимальное значение L и произведите расчет для $\nu = 3 \cdot 10^9$ Гц.

II

Примем для L найденное выше минимальное значение, и пусть E_0 будет максимальной амплитудой E_z . Выразите поля E_z , H_x , H_y и H_z как функции x , y , z , t и параметров L , E_0 и $\omega = 2\pi\nu$. Найдите среднюю энергию, содержащуюся в резонаторе, как функцию L и E_0 .

Численный пример:

$$\nu = 3 \cdot 10^9 \text{ Гц}, \quad E_0 = 10^7 \text{ В/м}.$$

РЕШЕНИЕ

I

Для монохроматической волны волновое уравнение записывается как

$$\Delta \mathbf{E} + \sigma^2 \mathbf{E} = 0 \quad \left(\sigma = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \right). \quad (1)$$

Для искомого поля

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = E_z(x, y)$$

уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \sigma^2 E_z = 0.$$

Подставляя в него решение, принятое выше: $E_z(x, y) = X(x)Y(y)$, имеем

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \sigma^2 = 0. \quad (2)$$

Общее решение будет

$$X = A_1 \sin(\sigma_1 x + \varphi_1), \quad Y = A_2 \sin(\sigma_2 y + \varphi_2), \quad (3)$$

и уравнение (2) требует, чтобы

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2. \quad (4)$$

Условия, налагаемые стенками идеального проводника, состоят в том, что тангенциальная компонента поля $\mathbf{E}$ и нормальная компонента поля $\mathbf{H}$ должны быть равны нулю, следовательно,

$$X(0) = X(L) = 0, \quad Y(0) = Y(L) = 0.$$

Решения (3) записываются как

$$X = A_1 \sin \frac{K_1 \pi x}{L}, \quad Y = A_2 \sin \frac{K_2 \pi y}{L},$$

где K_1 и K_2 — целые числа, которые при использовании (4) удовлетворяют условиям

$$(K_1^2 + K_2^2) \frac{\pi^2}{L^2} = \sigma^2$$

или

$$K_1^2 + K_2^2 = \frac{4L^2}{\lambda_0^2}.$$

Собственные частоты резонатора для рассматриваемой моды соответствуют длинам волн

$$\lambda_0 = \frac{2L}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}.$$

Минимальное значение L получается при $K_1 = K_2 = 1$:

$$L_m = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}.$$

При $\nu = 3 \cdot 10^9$ Гц и $\lambda_0 = 0,01$ м, $L_m = 7,07$ см.

II

При $L = L_m$ электрическое поле имеет вид

$$E_z = E_0 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \cos \omega t.$$

Можно найти магнитное поле из уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

что дает

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{E_0}{\mu_0} \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \cos \omega t, \\ -\frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{E_0}{\mu_0} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \cos \omega t, \end{aligned}$$

и для минимального значения L получаем

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{E_0 \pi}{\mu_0 L \omega} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \sin \omega t = \\ &= -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\mu_0}} E_0 \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \sin \omega t, \\ H_y &= \frac{E_0 \pi}{\mu_0 L \omega} \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \sin \omega t = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\mu_0}} E_0 \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Средняя энергия, заключаемая в резонаторе, получается из среднего по времени значения плотности энергии

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2).$$

Так как мы имеем дело с синусоидальными функциями, то $\langle E_z^2 \rangle = E_0^2/2$. Наконец, нужно взять средние значения по объему:

$$\langle E_z^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2} \cdot \frac{1}{L} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \cdot \frac{1}{L} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi y}{L} dy = \frac{E_0^2}{2} \cdot \frac{1}{4},$$

$$\langle H_x^2 \rangle = \frac{\epsilon_0}{2\mu_0} \cdot \frac{E_0^2}{2} \cdot \frac{1}{4}, \quad \langle H_y^2 \rangle = \frac{\epsilon_0}{2\mu_0} \cdot \frac{E_0^2}{2} \cdot \frac{1}{4},$$

$$\langle W \rangle = L^3 \frac{E_0^2}{4} \left[\frac{\epsilon_0}{4} + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\epsilon_0 E_0^2 L^3}{8}.$$

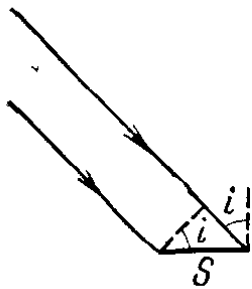
Численный пример.

$$\langle W \rangle = \frac{10^{14} \cdot 10^{-1}}{8 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} \approx 4,0 \text{ Дж.}$$

ЗАДАЧА 16

Давление излучения

Напишите выражение для давления, производимого монохроматической плоской волной с частотой ν , содержащей N фотонов в единице объема, на плоскую поверхность в вакууме при падении на нее под углом i . Рассмотрите следующие случаи: а) поверхность — черное тело; б) поверхность отражает зеркально с коэффициентом отражения R и в) поверхность — идеальный рассеиватель излучения.



Численный пример. Подсчитайте давление, производимое солнечным излучением на землю, считая, что земля — идеальный рассеиватель. Параметры даются в задаче 19.

РЕШЕНИЕ

Фиг. 16.1

Импульс, переносимый в одну секунду падающими фотонами, заключенными в цилиндре длиной c с поперечным сечением $S \cos i$ (фиг. 16.1), равен

$$N \frac{h\nu}{c} c S \cos i,$$

так как импульс фотона равен $h\nu/c$. Сила, действующая на зеркало в направлении падения, равна

$$F = N h \nu S \cos i,$$

и давление излучения, перпендикулярное поверхности, равно

$$\bar{\omega} = \frac{F \cos i}{S} = N h \nu \cos^2 i = \omega \cos^2 i, \quad (1)$$

поскольку плотность излучаемой энергии равна $N h \nu$, где $h\nu$ — энергия фотона.

а) Если вся поверхность поглощает, то давление излучения определяется выражением (1).

б) Если поверхность — зеркало с коэффициентом отражения R , то часть R падающих фотонов покидает зеркало в направлении, симметричном относительно нормали к зеркалу, и эти фотоны обладают импульсом

$$R \frac{N h \nu}{c} c S \cos i.$$

Соответствующее давление равно

$$\bar{\omega}' = RNh\nu \cos^2 i = R\omega \cos^2 i,$$

и суммарное давление излучения становится равным

$$\bar{\omega} + \bar{\omega}' = \omega(1 + R) \cos^2 i. \quad (2)$$

в) Если поверхность — идеальный рассеиватель, то падающие фотоны рассеиваются от поверхности во всех направлениях с равной вероятностью. Тогда вероятность того, что фотон рассеивается в телесном угле $d\Omega$, равна $d\Omega/2\pi = \sin i \, di$, если принимать за телесный угол тот угол, который лежит между двумя конусами с углами полураствора i и $i + di$ соответственно. Среднее значение проекции импульса фотона, рассеивающегося с поверхности под углом i с нормалью к поверхности, равно

$$\int_0^{\pi/2} \frac{h\nu}{c} \cos i \sin i \, di = \frac{h\nu}{2c}.$$

Это соответствует давлению

$$\bar{\omega}'' = Nc \cos i \frac{h\nu}{2c} = \frac{\omega}{2} \cos i,$$

к которому прибавляется давление падающих фотонов, определяемое выражением (1). Общее давление равно

$$\bar{\omega} = \omega \left(\cos^2 i + \frac{1}{2} \cos i \right). \quad (3)$$

Численный пример. Используя параметры задачи 19, получаем, что 1 м² поверхности земли получает при нормальном падении света плотность потока $\Phi = 1,35 \cdot 10^3$ Вт. Плотность энергии равна $\omega = \Phi/c$, и при $i = 0$ уравнение (3) дает

$$\bar{\omega} = \frac{3}{2} \omega = \frac{3 \cdot 1,35 \cdot 10^3}{2 \cdot 3 \cdot 10^8} = 0,675 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2,$$

что составляет около $3/4$ мг/м².

ЗАДАЧА 17

Антенны

I

Начертите в плоскости, проходящей через диполь Герца, который ориентирован вдоль оси $z'Oz$, полярную диаграмму, изображающую величину электрического поля E и поток излучения Φ . Покажите, что поток можно представить в виде джоулева

тепла, рассеиваемого переменным током, который проходит через диполь и имеет максимальное значение I_m . Подсчитайте возникающее при этом сопротивление (сопротивление излучения антенны). Выразите поле как функцию мгновенной интенсивности тока I .

II

Рассмотрите линейную антенну, ориентированную вдоль $z'Oz$, имеющую длину немного меньшую, чем длина излучаемой волны, и изолированную на концах. При $l = \lambda/2$ выведите выражение для стационарного состояния тока, возникающего в антенне. Напишите выражение $I(z)$ для интенсивности тока в зависимости от ординаты z точки на антенне. Выберите начало координат в центре антенны. Исходя из полученного в первой части задачи выражения для поля E , которое можно здесь считать описывающим величину dE , излучаемую элементом длины антенны, найдите поле излучения на большом расстоянии r_0 от точки O и начертите полярную диаграмму в плоскости, проходящей через $z'z$.

III

Рассмотрите длинную линейную антенну, образованную из N сегментов длиной $\lambda/2$, между которыми вставлены $N - 1$ идентичных самоиндуктивностей пренебрежимо малых размеров и значение которых таково, что они вызывают сдвиг фазы тока на π . Установите направление излучения на полярной диаграмме в плоскости, проходящей через $z'z$.

РЕШЕНИЕ

I

Излучаемое электрическое поле на расстоянии r от диполя Герца в направлении, образующем угол θ с осью диполя, определяется выражением

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 d_m \sin \theta}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (1)$$

где d_m — амплитуда диполя, колеблющегося по синусоидальному закону с угловой частотой ω . Магнитное поле $H = \epsilon_0 c E_\theta$ соответствует полю E_θ электромагнитной волны.

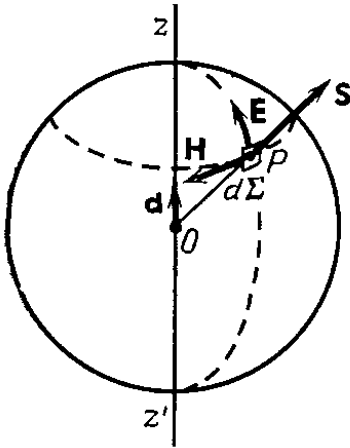
Поток излучаемой энергии, который пересекает элемент поверхности, перпендикулярный направлению OP на расстоянии

r от точки O , дается выражением (фиг. 17.1)

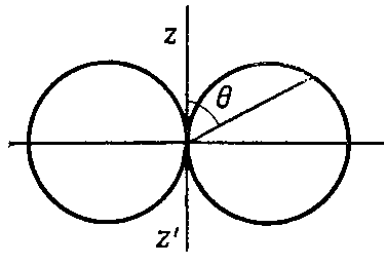
$$d\Phi = S d\Sigma = E_\theta H d\Sigma = \epsilon_0 c E_\theta^2 d\Sigma = \frac{\omega^4 d_m^2 \sin^2 \theta d\Sigma}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (2)$$

где $S = EH$ — вектор Пойнтинга.

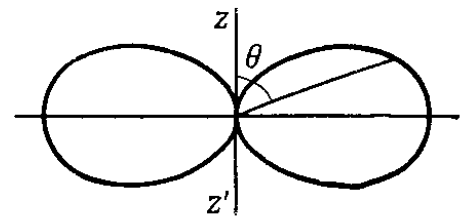
Полярная диаграмма для выражения (1), изменяющаяся как $\sin \theta$, приведена на фиг. 17.2. Полярная диаграмма для (2), изменяющаяся как $\sin^2 \theta$, — на фиг. 17.3.



Фиг. 17.1



Фиг. 17.2



Фиг. 17.3

Можно считать, что синусоидальный дипольный момент d возникает благодаря двум осциллирующим зарядам $\pm q_m \sin \omega t$, разделенным малым промежутком z . Имеем

$$d_m \sin \omega t = z q_m \sin \omega t$$

и эквивалентный ток

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega q_m \cos \omega t = I_m \cos \omega t,$$

следовательно,

$$z I_m = \omega d_m. \quad (3)$$

Далее, суммарный поток, излучаемый в полном телесном угле, может быть получен интегрированием выражения (2), где $d\Sigma = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$, так что

$$\Phi = \frac{\omega^4 d_m^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\omega^2 z^2 I_m^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

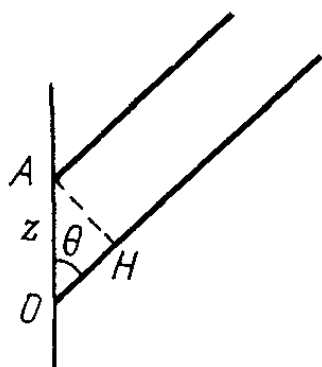
Мгновенная мощность записывается в виде джоулева тепла, так как она пропорциональна I^2 . Тогда можно написать $\mathcal{D} = R I^2$, где R — сопротивление излучения, определяемого уравнением

$$R = \frac{\Phi}{I^2} = \frac{\omega^2 z^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3\epsilon_0 c} \left(\frac{z}{\lambda} \right)^2 = 789 \left(\frac{z}{\lambda} \right)^2 \text{ Ом},$$

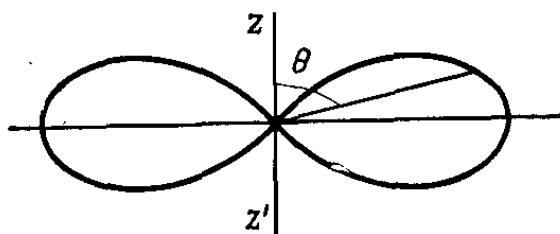
в котором использовано выражение для длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega$.

II

Реальная линейная антенна отличается от диполя Герца тем, что протекающий в ней высокочастотный ток не имеет одинаковых значений в каждой точке в данный момент и ее длина не мала по сравнению с излучаемой длиной волны. В расчетах антенну заменяют цепочкой диполей, момент каждого из которых зависит от расположения диполя и пропорционален интенсивности тока в точке его нахождения. Поле на больших расстояниях получается суммированием элементарных полей с учетом разностей фаз, производимых двумя точками, обсуждаемыми выше.



Фиг. 17.4



Фиг. 17.5

В антенне, изолированной на концах, ток в этих точках в каждый момент времени обязательно равен нулю. Синусоидальный ток с угловой частотой ω , распространяющийся вдоль такого проводника, удовлетворяет этим условиям на концах и в стационарном состоянии дает стоячие волны. Интенсивность записывается в виде

$$I = I_m \sin \omega t \sin \left(\frac{2\pi z}{\lambda} + \varphi \right) = I_0 \sin \left(\frac{2\pi z}{\lambda} + \varphi \right),$$

где I_0 — интенсивность в центре O антенны. Условия на концах: $I = 0$ при $z = \pm \lambda/4$, так что

$$I = I_0 \cos 2\pi \frac{z}{\lambda}.$$

Используя (3), из (1) можно получить выражение для поля, излучаемого элементом антенны длиной dz , и суммарное поле определяется выражением

$$E = \frac{I_m \sin \theta}{2\epsilon_0 c \lambda r} \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} dz \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (4)$$

Расстояние r от элемента dz , расположенного в точке A , где $OA = z$ (фиг. 17.4), до точки P , находящейся на расстоянии r_0 , большем чем λ и, таким образом, большем чем OA , в хорошем

приближении описывается выражением

$$r = r_0 - z \cos \theta,$$

которое, будучи подставлено в (4), дает

$$E = \frac{I_0 \sin \theta}{2\epsilon_0 c \lambda r_0} \int_0^{\lambda/4} \left[\sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} - \frac{z \cos \theta}{c} \right) + \right. \\ \left. + \sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} + \frac{z \cos \theta}{c} \right) \right] \cos \frac{2\pi z}{\lambda} dz,$$

следовательно,

$$E = \frac{I_0 \sin \theta}{\epsilon_0 c \lambda r_0} \sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right) \int_0^{\lambda/4} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \times \cos \frac{2\pi z \cos \theta}{\lambda} dz, \\ E = \frac{I_0 \sin \theta}{\epsilon_0 c \lambda r_0} \sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right) \times \\ \times \left[\frac{\lambda}{2\pi(1 + \cos \theta)} \sin \frac{2\pi z}{\lambda} (1 + \cos \theta) + \frac{\lambda}{2\pi(1 - \cos \theta)} \sin \frac{2\pi z}{\lambda} (1 - \cos \theta) \right]_0^{\lambda/4}, \\ E = \frac{I_0 \sin \theta}{2\pi \epsilon_0 c r_0} \left\{ \frac{\cos [(\pi/2) \cos \theta]}{1 + \cos \theta} + \frac{\cos [(\pi/2) \cos \theta]}{1 - \cos \theta} \right\} \sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right), \\ E = \frac{I_0}{2\pi \epsilon_0 c r_0} \frac{\cos [(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right) = \\ = 60 \frac{I_m}{r_0} \frac{\cos [(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right).$$

На фиг. 17.5 изображена полярная диаграмма излучения.

III

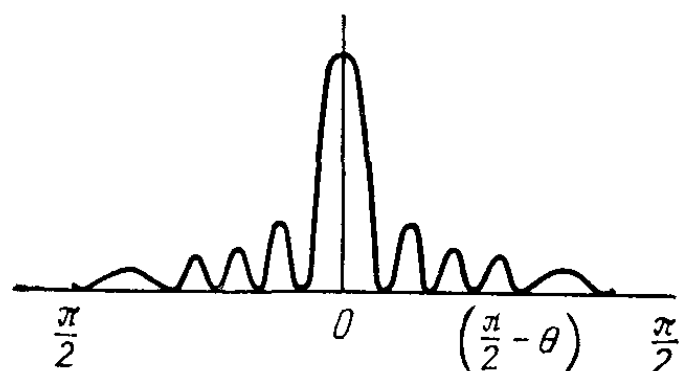
Предлагаемая антенна эквивалентна набору N последовательных антенн длиной $l = \lambda/2$; их токи находятся в фазе благодаря присутствию индуктивностей. Под углом θ разность хода между двумя последующими элементами равна $\lambda/2 \cos \theta$ (см. фиг. 17.4). Расчет результирующего поля осуществляется точно таким же образом, как и расчет дифракции для набора N идентичных эквидистантных щелей, излучающих в фазе. Результирующее поле будет

$$E = \frac{60 I_0}{r_0} \cdot \frac{\cos [(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin [(N\pi/2) \cos \theta]}{\sin [(\pi/2) \cos \theta]} \cdot \sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right).$$

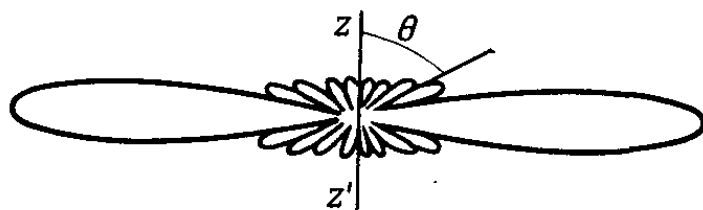
На фиг. 17.6 изображены изменения величины

$$\frac{\sin [(N\pi/2) \cos \theta]}{\sin [(\pi/2) \cos \theta]}$$

как функции угла θ для $N = 10$. Заметим, что разница в этих относительно похожих диаграммах заключается в том, что в случае оптической решетки имеется только один главный мак-



Фиг. 17.6



Фиг. 17.7

симум ($\theta = 0$), так как в этом случае период решетки равен $\lambda/2$.

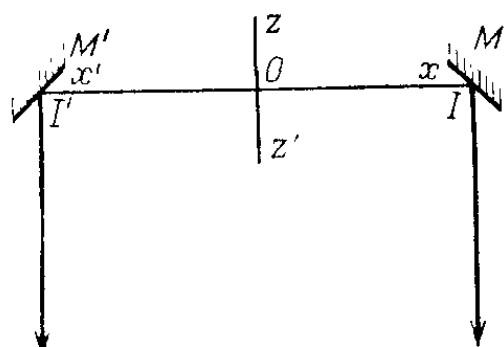
На фиг. 17.7 представлена полярная диаграмма излучения.

ЗАДАЧА 18

Диполи Герца

I

1. Обсудите опыт Френеля с зеркалами с точки зрения электромагнитной теории. Можно рассматривать источник S как осциллятор Герца, колеблющийся параллельно линии пересечения зеркал Δ , и тогда изображения источников S_1 и S_2 действуют



Фиг. 18.1

как синхронные осцилляторы с расстоянием l между ними. Найдите электрическое поле, магнитное поле и вектор Пойнтинга результирующей электромагнитной волны в зависимости от r , l и α в точке P на плоскости, нормальной к Δ , на расстоянии $CP = r_0$ от центра C линии S_1S_2 , где r_0 велико по сравнению с l и образует с l угол α .

2. Световой источник, который будет сравниваться с осциллятором Герца, помещается в центре O линии $I'I$, соединяющей два маленьких плоских диэлектрических зеркала M и M' (фиг. 18.1). Нормали к зеркалам IN и $I'N'$ образуют с II' оди-

наковые углы $\pi/4 - \varepsilon$ (ε — очень малый угол). Качественно обсудите возможность интерференции между отраженными лучами в каждом из следующих случаев:

- а) диполь колеблется вдоль $z'z$;
- б) диполь колеблется вдоль $y'y$, нормально к плоскости рисунка;
- в) оба указанных выше диполя считаются идентичными, синхронными и когерентными. Исследуйте состояние поляризации в поле интерференции.

Считайте, что телесные углы, под которыми видны зеркала M и M' из точки O , очень малы, и пренебрегите разницей в коэффициентах отражения для двух главных колебаний.

II

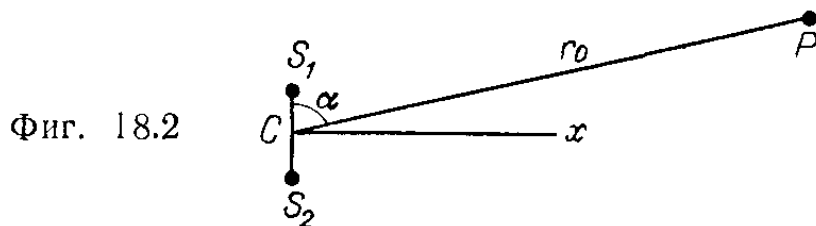
Световой источник O состоит из набора беспорядочно ориентированных осцилляторов Герца. Напишите выражение для электрического поля E и его компонент E_x и E_z как функцию угловых координат θ и φ на большом расстоянии от точки O для излучения, испускаемого источником:

- а) в направлении Oy ;
- б) в направлении Oy' , образующем угол γ с Oy на плоскости xOy . Рассчитайте контрастность полос, получаемых в результате интерференции излучений, испускаемых вдоль Oy и вдоль Oy' , в зависимости от γ .

РЕШЕНИЕ

I

1. Изображения осциллятора S_1 и S_2 нормальны к плоскости рисунка, которая является для обоих экваториальной плоскостью.



Электрическое поле электромагнитной волны, испускаемой каждым из них, нормально к плоскости фиг. 18.2 в точке P и дается выражением

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega d_m}{r_0} \sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right), \quad (1).$$

Поля E_1 и E_2 , параллельные в точке P , имеют в этой точке разность фаз вследствие разности хода $\delta = |r_2 - r_1|$. Если эта разность хода настолько невелика, что амплитудная разница из-за множителя $1/r$ пренебрежимо мала, то поля имеют одинаковую амплитуду

$$a = \frac{\omega d_m}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_0}.$$

С другой стороны, можно считать

$$\delta = l \cos \alpha,$$

откуда

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l \cos \alpha.$$

Результирующее поле E можно получить суммированием двух параллельных колебаний с амплитудой a и разностью фаз φ . Его интенсивность равна

$$A^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом,

$$E = 2a \cos \frac{\pi l \cos \alpha}{\lambda} \sin \left(t - \frac{r_0}{c} \right). \quad (2)$$

Поле H является результирующим для полей H_1 и H_2 , которые находятся в фазе с полями E_1 и E_2 соответственно, так как расстояние CP велико, и по этой же причине эти поля практически параллельны. Поскольку для электромагнитных плоских волн в вакууме

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E,$$

из (2) получаем

$$H = 2a \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos \frac{\pi l \cos \alpha}{\lambda} \sin \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right). \quad (3)$$

Вектор Пойнтинга равен

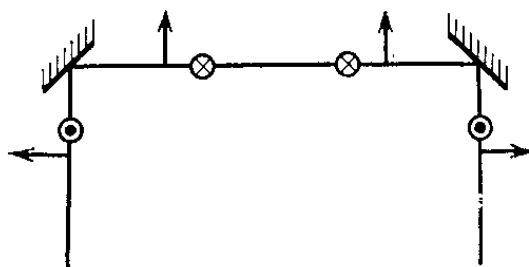
$$S = E \cdot H = 4a^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos^2 \frac{\pi l \cos \alpha}{\lambda} \sin^2 \omega \left(t - \frac{r_0}{c} \right).$$

2. Так как зеркала дают изображения точки O , разделенные очень малым угловым расстоянием, то можно считать, что излучение от точки O образует квазипараллельный пучок лучей. Электрические поля испущенных волн параллельны диполю и, таким образом, находятся либо в плоскости падения на зеркала, либо нормальны к ней.

При угле падения, близком к $\pi/4$ и меньшем, чем угол Брюстера для всех диэлектриков, колебания, параллельные $z'z$ или

$y'y$, подвергаются при отражении фазовому опережению на π . Эта схема показана на фиг. 18.3. Если отраженные пучки объединяются, что происходит на больших расстояниях от точки O , то на оси $z'z$ имеет место интерференция с усилением для колебаний, параллельных $y'y$, и интерференция с ослаблением для

Фиг. 18.3



колебаний, испущенных из точки O параллельно $z'z$ (они практически антипараллельны в точке их объединения и направлены вдоль $x'x$).

Если двигаться от центра интерференционного поля параллельно $x'x$, то колебания, параллельные $y'y$, записываются в виде

$$E'_y = E_m \cos \omega t, \quad E''_y = E_m \cos (\omega t + \varphi).$$

Здесь φ представляет собой разность фаз, обусловленную разностью хода, которая изменяется линейно как функция переменной x . Результирующая амплитуда равна

$$E_y = 2E_m \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (4)$$

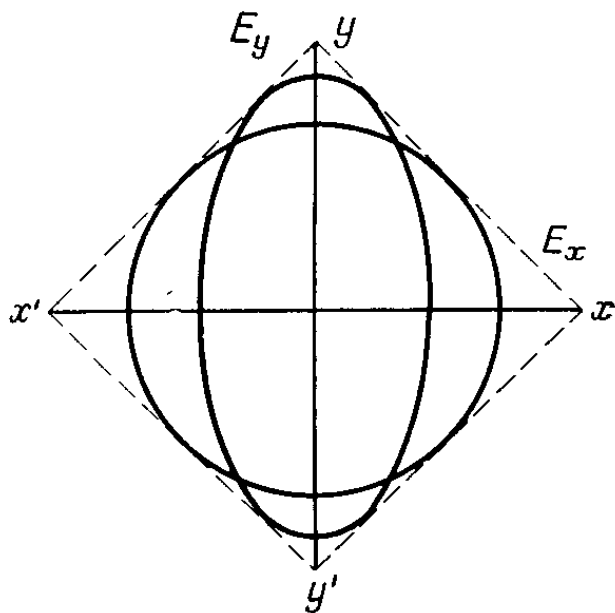
Колебания, испущенные параллельно $z'z$, равны

$$E'_x = E_m \cos \omega t,$$

$$E''_x = E_m \cos (\omega t + \pi + \varphi).$$

Амплитуда E_m — та же, что и прежде, так как коэффициенты отражения считаются равными. Результирующая амплитуда равна

$$E_x = 2E_m \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left(\omega t + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (5)$$



Фиг. 18.4

Колебания (4) и (5) перпендикулярны друг другу, и отношения их амплитуд изменяются с φ , т. е. с положением точки наблюдения вдоль линии, параллельной $x'x$. В каждой точке компоненты дают эллиптически поляризованное колебание, причем оси эллипса параллельны $y'y$ и $x'x$ и имеют изменяющиеся размеры, соответственно равные $2E_m \cos \varphi/2$ и $2E_m \sin \varphi/2$. Все эти эллипсы могут быть вписаны в квадрат со стороной $E_m \sqrt{2}$ (фиг. 18.4).

При $\varphi = 0$ эллипс вырождается в линию, параллельную Y , при $\varphi = \pi$ — в линию, параллельную X , и при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$ мы получаем окружности.

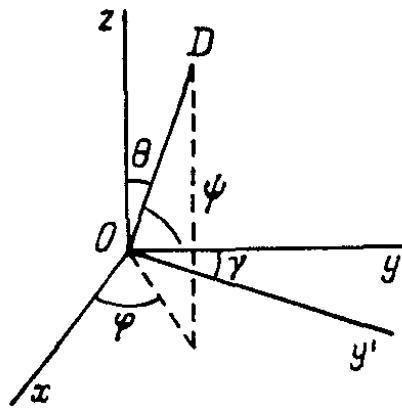
Если взять компоненты колебаний во второй степени, то результирующая интенсивность будет равна

$$I = E_y^2 + E_x^2 = 4E_m^2.$$

Эта величина постоянна. В отсутствие анализатора интерференционное поле равномерно освещено.

II

Пусть θ и φ (фиг. 18.5) — углы, определяющие ориентацию диполя OD в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Для наблюдателя, находящегося на оси Oy , электрическое поле волны, испущенной диполем, пропорционально $\sin \psi$, где ψ — угол DOy .



Фиг. 18.5

Поле E находится в плоскости xOz , так как свободная электромагнитная волна поперечна. Его компонентами являются

$$E_x = E \sin \theta \cos \varphi, \quad E_z = E \cos \theta.$$

В направлении Oy' , которое образует угол γ с Oy , электрическое поле находится в плоскости $x'Oz$ (направление Ox' нормально к Oy'), и его компоненты имеют вид

$$E'_x = E \sin \theta \cos (\varphi \pm \gamma), \quad E'_z = E \cos \theta.$$

Колебания E_x и E'_x могут интерферировать так же, как E_z и E'_z . Однако первые не интерферируют со вторыми, так как они взаимно перпендикулярны. Поля, создаваемые различными некогерентными диполями, не интерферируют. Максимумы интенсивности определяются выражением

$$I_M = \sum \{(E'_x + E_x)^2 + (E_z + E'_z)^2\}$$

(суммирование ведется по всем диполям), и минимумы даются выражением

$$I_M = \sum \{(E_x - E'_x)^2 + (E_z - E'_z)^2\}.$$

Определяя контрастность как

$$\Gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m},$$

получаем

$$\Gamma = \frac{\sum \{2(E_x E'_x + E_z E'_z)\}}{\sum (E_x^2 + E_x'^2 + E_z^2 + E_z'^2)} = \frac{N}{D}.$$

Теперь необходимо принять во внимание случайную ориентацию диполей, оси которых равномерно распределены по всем элементам телесного угла $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Суммы N и D заменяются интегралами:

$$\begin{aligned} N &= 2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta (E_x E'_x + E_z E'_z) = \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos(\varphi \pm \gamma) \cos \varphi d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta + 2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} d\left(-\frac{\cos^3 \theta}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi \pm \gamma) \cos \varphi d\varphi + \frac{4\pi}{3} = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \cos \gamma \cos^2 \varphi d\varphi \mp \int_0^{2\pi} \sin \gamma \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{4\pi}{3}, \end{aligned}$$

$$N = \frac{4\pi}{3} (1 + \cos \gamma).$$

$$\begin{aligned} D &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \{\sin^2 \theta [\cos^2 \varphi + \cos^2(\varphi \pm \gamma) + 2 \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta = \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} [\cos^2 \varphi + \cos^2(\varphi \pm \gamma)] d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta + 2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Последний интеграл рассчитывался ранее. Так как

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3},$$

$$D = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 (\varphi \pm \gamma) d(\varphi \pm \gamma) + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3},$$

тогда

$$\Gamma = \frac{N}{D} = \frac{1 + \cos \gamma}{2}.$$

При $\gamma = 0$ имеем $\Gamma = 1$. Опыты Френеля с зеркалами аппроксимируют этот случай, так как при этом происходит интерференция волн, испускаемых единственным источником вдоль приблизительно параллельных направлений.

При $\gamma = \pi$ получаем $\Gamma = 0$. Наконец, при $\gamma = \pi/2$ имеем $\Gamma = 1/2$.

ЗАДАЧА 19

Фотометрия. Система Земля — Солнце

Один квадратный метр земной поверхности, освещаемый солнцем при нормальном падении излучения, получает поток в 1,35 Вт, если пренебречь поглощением атмосферой.

1. Рассчитайте поток, испускаемый одним квадратным метром солнечной поверхности, считая, что она излучает по закону Ламберта. Вспомним, что кажущийся угловой диаметр Солнца, видимый с Земли, равен $2\alpha = 32'$.

2. Рассчитайте потерю солнечной массы в секунду за счет излучения, считая расстояние Земли от Солнца равным $5 \cdot 10^7$ км.

3. Будем считать, что поверхность Земли равномерно рассеивает долю ρ падающего потока излучения. Рассчитайте яркость Земли.

4. Рассчитайте амплитуду электрического и магнитного полей на поверхности Земли, обусловленных облучением.

РЕШЕНИЕ

1. Солнце излучает согласно закону Ламберта, и его яркость $\mathcal{L}$ постоянна. Поток, испускаемый элементом солнечной поверхности dS в телесном угле $d\Omega$, ось которого образует угол θ с нормалью к dS , равен

$$d^2\Phi = \mathcal{L} dS \cos \theta d\Omega. \quad (1)$$

Принимая за $d\Omega$ телесный угол, лежащий между двумя конусами с вершиной на dS , осью, нормальной к dS , и апертурой 2θ (фиг. 19.1), имеем

$$d^2\Phi = \mathcal{L} dS \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Поток, излучаемый элементом dS во внешнее пространство, равен

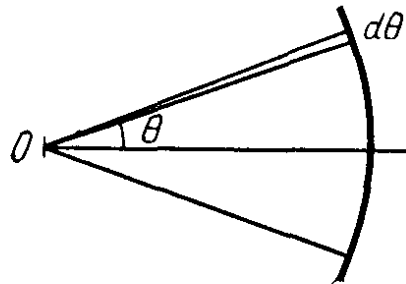
$$d\Phi = \pi \mathcal{L} dS \int_0^{\pi/2} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi \mathcal{L} dS \int_0^{\pi/2} 2 \sin \theta d(\sin \theta),$$

$$d\Phi = \pi \mathcal{L} dS [\sin^2 \theta]_0^{\pi/2} = \pi \mathcal{L} dS.$$

Отношение $d\Phi/dS = B$ представляет собой *светимость*, или *излучательную способность*, поверхности. Для излучателя, который подчиняется закону Ламберта, имеем

$$B = \pi \mathcal{L}. \quad (2)$$

Заметим, что сфера, которая излучает по закону Ламберта, эквивалентна плоскому диску, множитель $\cos \theta$ в (1) точно компенсирует наклон поверхности, отсчитываемый от нормали. Именно таким образом и видно Солнце.



Фиг. 19.1

Поток (1), испускаемый Солнцем и падающий по нормали к поверхности dS' Земли на расстоянии r от Солнца, может быть записан как

$$d^2\Phi = \mathcal{L} dS \frac{dS'}{r^2}.$$

Создаваемая освещенность по определению равна

$$d\mathcal{E} = \frac{d^2\Phi}{dS'} = \mathcal{L} \frac{dS}{r^2}.$$

Освещенность, создаваемая солнечным диском, который виден под углом

$$\frac{S}{r^2} = \pi \alpha^2,$$

равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{L} \pi \alpha^2.$$

Таким образом, светимость Солнца имеет величину

$$B = \pi \mathcal{L} = \frac{\mathcal{E}}{\alpha^2} = \frac{1,35 \cdot 10^3}{(16 \cdot 3 \cdot 10^{-4})^2} = 5,8 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2.$$

2. Исходя из соотношения между массой и энергией, можно написать

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2},$$

где c — скорость света в вакууме.

Можно рассчитать суммарную мощность, теряемую Солнцем, учитывая, что она равна мощности, получаемой единичной площадью поверхности Земли, умноженной на площадь поверхности сферы с радиусом, равным расстоянию от Земли до Солнца, т. е.

$$\Phi = 1,35 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot (15)^2 \cdot 10^{20} = 3,815 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

Следовательно, потеря массы в секунду равна

$$\Delta m = \frac{\Phi}{c^2} = \frac{3,815 \cdot 10^{26}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4,24 \cdot 10^9 \text{ кг,}$$

что соответствует годовой потере в $1,4 \cdot 10^{13}$ т. Однако масса Солнца равна $2 \cdot 10^{27}$ т.

3. Площадь поверхности Земли, которая получает поток $d\Phi$, вновь излучает в пространство поток $d\Phi' = \rho d\Phi$. Таким образом, светимость Земли равна

$$B' = \frac{d\Phi'}{dS'} = \rho \frac{d\Phi}{dS} = \rho \mathcal{E}$$

и ее яркость будет

$$\mathcal{L}' = \frac{\rho}{\pi} \mathcal{E}.$$

4. Средняя освещенность, создаваемая плоской электромагнитной волной, связана с амплитудой электрического поля соотношением

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \epsilon_0 c \frac{E_m^2}{2};$$

отсюда

$$E_m^2 = \frac{2 \langle \mathcal{E} \rangle}{\epsilon_0 c} = \frac{2 \cdot 1,35 \cdot 10^3 \cdot 36\pi \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 101,8 \cdot 10^4,$$

$$E_m = 1010 \text{ В/м.}$$

Магнитное поле волны имеет амплитуду

$$H_m = \frac{1}{c\mu_0} E_m = \frac{1010}{3 \cdot 10^8 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6}} = 2,7 \text{ А/м.}$$

ЗАДАЧА 20

Спектры и энергия лазера

Возбужденный соответствующим образом рубиновый лазер излучает гигантский световой импульс с длиной волны $\lambda = 6935,9 \text{ \AA}$ (волновое число $\tilde{\nu} = 14418 \text{ см}^{-1}$). Будем считать, что каждый импульс может быть приписан цугу из линейно-поляризованных плоских волн с постоянной амплитудой, длительностью $\tau = 0,1 \text{ мс}$ и с энергией $W = 0,3 \text{ Дж}$. Поперечное сечение

пучка представляет собой круг диаметром 5 мм. Импульс распространяется в воздухе, показатель преломления которого принят равным единице.

I

Рассчитайте число фотонов N , переносимых импульсом. Зная, что флуктуация числа фотонов в волне равна $\sqrt{N}$, получите выражение для соответствующей флуктуации фазы ϕ волны, связанной с N фотонами. Какое заключение можно сделать относительно преобладания корпускулярных или волновых свойств света?

II

Рассчитайте спектр частот $G(\nu)$ каждого импульса. Получите выражение для спектральной ширины $\Delta\nu$, определяемой как половина интервала между двумя нулевыми значениями функции $G(\nu)$ вокруг центрального максимума. Выведите выражение, связывающее ширину в волновых числах и длину L волнового цуга.

Численно определите значение $\Delta\tilde{\nu}$ в милликайзерах (см. ниже) и $\Delta\lambda$ в миллиангстремах.

Если импульс вводится в интерферометр Майкельсона, то покажите без дополнительных вычислений, какая разность хода необходима для того, чтобы интерференция больше не наблюдалась. Возможно ли это физически?

III

1. Рассчитайте объемную плотность энергии w , переносимую импульсом (при подсчете объема, занимаемого волновым цугом, пренебрегите расширением пучка за счет дифракции).

2. Получите численное значение электрического поля волны.

3. Рассчитайте давление, производимое на плоский экран, перпендикулярный пучку, в следующих случаях:

α) экран полностью поглощает;

β) экран полностью отражает;

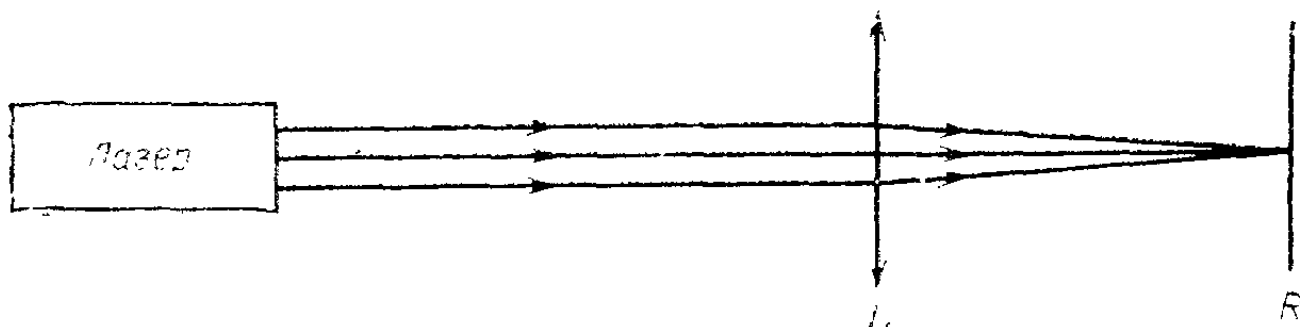
γ) экран имеет коэффициент отражения $R = 0,9$ и коэффициент поглощения $A = 0,1$.

IV

Поместите на траектории пучка свободную от аберраций линзу L с фокусным расстоянием $F = 5$ см, диаметр которой достаточно велик для того, чтобы она не была зрачком системы.

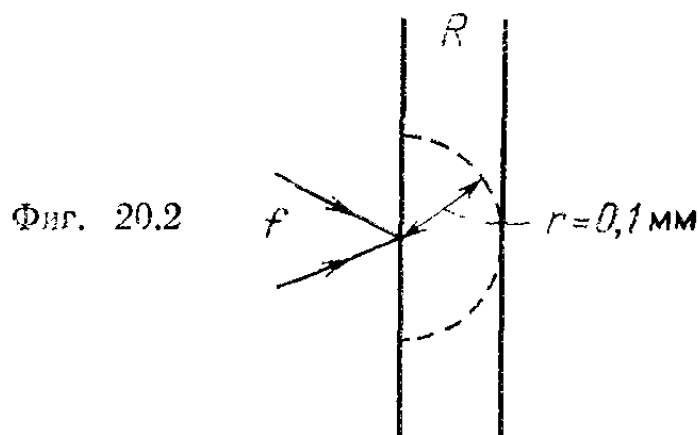
Фольга из стали толщиной 0,1 мм помещается в плоскости фокуса L (фиг. 20.1).

1. Определите радиус ρ центрального дифракционного пятна. Считайте, что это пятно получает 75% энергии, содержащейся в импульсе (учтите коэффициент пропускания линзы).



Фиг. 20.1

2. Коэффициент поглощения для стальной фольги R равен 0,1. Поглощаемая энергия преобразуется в тепло и изотропно рассеивается вокруг пятна. Какое количество тепла необходимо, чтобы нагреть до температуры плавления полусферу из стали



Фиг. 20.2

радиусом 0,1 мм (фиг. 20.2)? Сравните эту величину с количеством тепла, переносимого одним импульсом. Какой вывод можно сделать?

Численный пример:

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м},$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ Ф/м},$$

$$1 \text{ кайзер} = 1 \text{ см}^{-1} = 100 \text{ м}^{-1},$$

$$\text{плотность стали равна } 7,83 \text{ г/см}^3,$$

$$\text{удельная теплоемкость стали равна } 0,11 \cdot 4,18 \text{ Дж/г},$$

$$\text{точка плавления стали } t = 1525^\circ \text{C}.$$

РЕШЕНИЕ

I

Энергия одного импульса равна энергии одного фотона, умноженной на N , так что

$$W = Nh\nu = Nhc\tilde{\nu},$$

$$N = \frac{0,3}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 14,418 \cdot 10^2} \approx 1,05 \cdot 10^{18}.$$

Флуктуации числа фотонов и фазы волны связаны соотношением неопределенности

$$\Delta W \Delta t \geq h.$$

Действительно, неопределенность в W обусловлена неопределенностью в N , квант определяется частотой.

Таким образом, имеем

$$\Delta N h \nu \Delta t \geq h.$$

Однако неопределенность во времени Δt связана с неопределенностью $\Delta \varphi$ в фазе. Находим

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T} = \nu t,$$

следовательно,

$$\Delta \varphi = 2\pi \nu \Delta t$$

и

$$\Delta N \Delta \varphi \geq 2\pi.$$

Если $\Delta N = \sqrt{N}$, то $\Delta \varphi \geq 2\pi / \sqrt{N}$. Значение N — велико, $\Delta \varphi$ — очень мало. В случае частот, соответствующих относительно длинным (красным) волнам, преобладают волновые свойства.

II

Импульс описывается выражением

$$s(t) = a \cos 2\pi \nu_0 t \quad \left(-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}\right).$$

В комплексной форме

$$s(t) = a \exp(-j2\pi \nu_0 t).$$

Соответствующий спектр частот имеет вид

$$G(\nu) = a \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[j2\pi(\nu - \nu_0)t] dt = \frac{a}{2\pi(\nu - \nu_0)} [\exp j2\pi(\nu - \nu_0)t]_{-\tau/2}^{+\tau/2},$$

$$G(\nu) = a\tau \frac{\sin 2\pi(\nu - \nu_0)\tau/2}{2\pi(\nu - \nu_0)\tau/2}.$$

Первые два нуля хорошо известной функции $G(\nu)$ появляются при $2\pi(\nu - \nu_0)\tau/2 = \pm\pi$.

Полуинтервал между этими значениями соответствует области частот

$$\nu - \nu_0 = \frac{1}{\tau},$$

так что, поскольку $\tilde{\nu} = \nu/c$ и длина $L = c\tau$, получаем

$$\Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = \frac{1}{L}.$$

Численно:

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{1}{c\tau} = \frac{1}{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4}} = 0,33 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1} = 3,3 \text{ милликайзер},$$

$$|\Delta\lambda| = \lambda^2 \Delta\tilde{\nu} = 48,10 \cdot 10^{-14} \cdot 3,3 \cdot 10^{-5} =$$

$$= 1,59 \cdot 10^{-17} \text{ м} = 1,59 \cdot 10^{-4} \text{ мÅ},$$

$$L = \frac{1}{\Delta\tilde{\nu}} = 3 \cdot 10^4 \text{ м}.$$

Интерференция в интерферометре Майкельсона больше не наблюдается, если расстояние между зеркалами порядка $L/2$ или 10 км. На этом расстоянии нельзя получить однородные оптические пути.

III

Объем, занимаемый волновым пучком, равен

$$v = \frac{\pi d^2}{4} L = 59 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

1. Плотность энергии равна

$$w = \frac{W}{v} = \frac{0,3}{59 \cdot 10^{-2}} = 0,508 \text{ Дж/м}^3.$$

2. Выражение для плотности энергии в электромагнитной теории записывается в виде

$$w = \epsilon_0 E^2,$$

следовательно,

$$E = \sqrt{575 \cdot 10^8} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ В/м}.$$

3. Давление излучения при нормальном падении равно

$$\alpha) \bar{\omega} = w = 0,508 \text{ Н/м}^2,$$

$$\beta) \bar{\omega} = 2w = 1,016 \text{ Н/м}^2,$$

$$\gamma) \bar{\omega} = (1 + R)w = 1,9w = 0,965 \text{ Н/м}^2.$$

IV

1. $\rho = 1,22\lambda F/d = 8,5 \cdot 10^{-4}$ см.
2. Масса полусферы из стали равна

$$M = \frac{2}{3} \pi r^3 \delta,$$

где δ — плотность и r — радиус сферы

$$M = \frac{2}{3} \cdot 3,14 \cdot 10^{-6} \cdot 7,83 = 1,69 \cdot 10^{-6} \text{ г.}$$

Количество тепла, необходимое для повышения температуры от комнатной до точки плавления, равно

$$MC \Delta t = 16,9 \cdot 10^{-6} \cdot 0,11 \cdot 4,18 \cdot (1525 - 25) = 1,14 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

За время одного импульса пленка получит количество энергии, равное

$$0,3 \cdot 0,75 \cdot 0,1 = 2,25 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

Таким образом, в точке попадания излучения фольга будет расплавлена.

ЗАДАЧА 21

Оптические константы германия

Показатель преломления для $\lambda_0 = 0,5$ мкм (в вакууме) определяется выражением

$$n = 3,47 - 1,40j \quad (j = \sqrt{-1}).$$

1. Рассчитайте коэффициент отражения от полированной поверхности германия при нормальном падении.

2. Рассчитайте фазовый сдвиг φ_n , вызываемый отражением при нормальном падении.

3. Рассчитайте глубину проникновения плоской волны в германий, на которой ее интенсивность падает до 1/1000 от интенсивности падающего излучения.

РЕШЕНИЕ

Показатель преломления германия в комплексной форме имеет вид $n = n - jk$, где n — показатель преломления и k — показатель поглощения. Формула Френеля применима к комплексному показателю преломления при нормальном падении.

Коэффициент отражения для световой амплитуды является комплексной величиной:

$$\mathbf{r}_n = r_n \exp(j\varphi) = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n-jk-1}{n-jk+1}. \quad (1)$$

Отсюда можно получить коэффициент отражения

$$R_n = \mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^* = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} \quad (2)$$

и фазовое опережение отраженной волны

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{2k}{1 - n^2 - k^2}. \quad (3)$$

1. Используя полученные значения, находим

$$R_n = \frac{(3,47-1)^2 + (1,40)^2}{(3,47+1)^2 + (1,40)^2} = \frac{6,10 + 1,96}{19,98 + 1,96} = 0,37.$$

2.

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{2,80}{1 - (3,47)^2 - (1,40)^2} = \frac{-2,80}{13,00} = -0,216.$$

3. Уменьшение интенсивности света как функция глубины его проникновения x описывается экспоненциальным законом:

$$I = I_0 \exp(-2Kx),$$

где

$$K = \frac{2\pi k}{\lambda_0}.$$

Мы должны иметь

$$\frac{I}{I_0} = 10^{-3},$$

$$\exp\left(-\frac{4\pi kx}{\lambda_0}\right) = 10^{-3},$$

$$\frac{4\pi kx}{\lambda_0} = 6,907,$$

$$x = \frac{6,907 \cdot 0,5}{4 \cdot 3,14 \cdot 1,40} \approx 0,2 \text{ мкм.}$$

ЗАДАЧА 22

Поглощение. Черные и цветные тела

I

На маленький плоский диск солнечное излучение падает почти нормально. Из двух сторон диска будет рассматриваться только сторона F , обращенная к Солнцу, другая сторона не играет никакой роли. Будем считать, что диск помещен в вакуум,

значительно удален от других объектов и его температура всегда равномерно распределена. Предположим, что Солнце излучает как черное тело при 6000 К, и его светимость обозначим через H . Кажущийся диаметр Солнца мал, если на него смотреть из точки D , и он принимается равным 2α . Рассчитайте равновесную температуру диска в следующих случаях:

1. Диск излучает и поглощает как черное тело с поверхностью F . Примите 2α равным 10^{-2} рад и затем равным 10^{-4} рад.

2. Рассмотрите еще раз вопрос 1, но теперь считайте, что солнечные лучи падают наклонно на поверхность F . Косинус угла падения можно считать равным 0,25.

3. Рассмотрите еще раз вопрос 1, заменяя диск D малой сферой, вся поверхность которой представляет собой черное тело.

II

Диск имеет спектральную энергетическую светимость и коэффициент поглощения, который равен нулю для всего излучения, кроме длин волн, очень близких к 0,40 мкм. В этом интервале диск ведет себя как черное тело. Пусть угол 2α принимает два значения 10^{-2} и 10^{-4} рад. Считайте, что вблизи 0,40 мкм светимость черного тела в хорошем приближении описывается выражением

$$\ln H_\lambda = a - \frac{b}{T}, \quad \text{где} \quad \frac{6000}{b} = 0,385,$$

где a — константа. Рассчитайте равновесную температуру для условий 1 и 2 вопросов части I.

III

Черное тело, обладающее достаточно малыми размерами (при этом его температура всегда одинакова во всех точках) и теплоемкостью M , помещено в описанную выше экспериментальную установку. Сначала оно было защищено от излучения и имело довольно низкую температуру. Затем тело было подвергнуто действию солнечного излучения. По какому закону повышается его абсолютная температура как функция времени? Как будет вести себя этот закон вблизи равновесной температуры?

РЕШЕНИЕ

I

Согласно определению, H — энергетический поток, излучаемый поверхностью S во все внешнее пространство, равен

$$\Phi = HS.$$

Если Солнце имеет радиус R и излучает как черное тело,

$$S = 4\pi R^2 \quad \text{и} \quad H = \sigma T_0^4 \quad (\sigma = 5,672 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{град}^{-4}).$$

Этот поток проходит сквозь сферы с увеличивающимся радиусом, и поток, достигающий площади s на сфере радиусом r , равен

$$\frac{\Phi s}{4\pi r^2} = s \frac{R^2}{r^2} \sigma T_0^4 = s \alpha^2 \sigma T_0^4 \quad (1)$$

при $\alpha^2 = R^2/r^2$.

С другой стороны, диск площадью S при температуре T' излучает как черное тело, и его светимость равна $H' = \sigma T'^4$. При равновесии входящий и выходящий потоки равны.

1. Диск, расположенный под прямым углом, $s = S$.

$$S \alpha^2 \sigma T^4 = S \sigma T'^4, \quad (2)$$

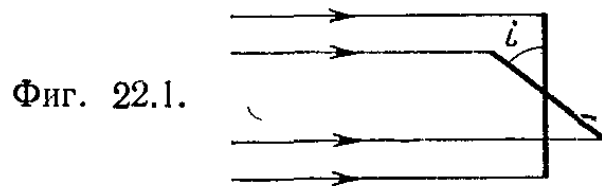
следовательно,

$$T'^4 = \alpha^2 T_0^4, \quad T' = \sqrt{\alpha} T_0.$$

При $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-2}$, $T' = 0,071 \cdot 6000 = 426 \text{ К}$,

$$\alpha = 0,5 \cdot 10^{-4}, \quad T' = 42,6 \text{ К}.$$

2. Диск, расположенный наклонно. Теперь излучение падает на поверхность площадью $s = S \cos i$ (фиг. 22.1). Однако



всегда излучение происходит со всей площади поверхности S ; таким образом, при равновесии

$$S \cos i \alpha^2 \sigma T_0'^4 = S \sigma T''^4,$$

$$T'' = \sqrt{\alpha} \sqrt[4]{\cos i} T_0 = \frac{T'}{\sqrt{2}}.$$

При $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-2}$ $T'' = 300 \text{ К}$,

при $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-4}$ $T'' = 30 \text{ К}$.

3. Сфера радиусом ρ . Она захватывает часть лучей (сечение площадью $s = \pi \rho^2$) и излучает со всей площади поверхности

$S = 4\pi\rho^2$, отсюда при равновесии

$$\pi\rho^2\alpha^2\sigma T_0^4 = 4\pi\rho^2\sigma T'^4, \quad (4)$$

$$T' = \sqrt{\alpha} \sqrt[4]{\frac{1}{4}} T_0.$$

При численном значении $\cos i = 1/4$, взятом в «б», температура сферы в «в» та же, что и диска в «б».

II

Пусть $\Delta\lambda$ будет шириной спектральной полосы, в которой диск поглощает и излучает, $H_{\lambda T_0}$ — спектральная светимость Солнца, $H_{\lambda T'}$ — спектральная светимость черного тела при равновесной температуре T' поглощающего тела и A_λ — коэффициент поглощения. Обозначим через S площадь поверхности поглотителя и через s площадь поверхности, которая получает излучение; спектральная энергия получаемого потока равна

$$s\alpha^2 H_{\lambda T_0} \Delta\lambda.$$

Тело поглощает часть A_λ этого потока. С другой стороны, его спектральная светимость, согласно закону Кирхгофа, равна $A_\lambda H_{\lambda T'}$. Излучаемый поток равен

$$SA_\lambda H_{\lambda T'} \Delta\lambda.$$

Отсюда при равновесии

$$H_{\lambda T'} = \frac{s}{S} \alpha^2 H_{\lambda T_0}.$$

Прологарифмировав обе части равенства и используя выражение для H_λ , получаем

$$a - \frac{b}{T'} = \ln \frac{s\alpha^2}{S} + a - \frac{b}{T_0},$$

откуда

$$T' = \frac{6000}{1 + 0,385 \ln (S/s\alpha^2)}.$$

1. Диск, расположенный под прямым углом: $S = s$

При $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-2}$ $T' = 2165$ К,

$\alpha = 0,5 \cdot 10^{-4}$ $T' = 1392$ К.

2. Диск или сфера, расположенные наклонно: $S = 4s$

При $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-2}$ $T' = 1998$ К,

$\alpha = 0,5 \cdot 10^{-4}$ $T' = 1320$ К.

III

Черное тело получает поток [см. уравнение (2)] от Солнца. Если его температура равна T , то оно излучает поток $S\sigma T^4$. Если его температура повысилась на dT за время dt , то энергетический баланс записывается в виде

$$S\sigma(T'^4 - T^4) dt = M dt.$$

Принимая $T/T' = x$ и $B = S\sigma T'^3/M$, получаем

$$\frac{dx}{1-x^4} = B dt.$$

Эта дробь может быть разбита на более простые дроби. Действительно, получаем

$$\frac{4}{1-x^4} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}.$$

Следовательно,

$$4Bt + C = 2 \operatorname{arctg} x + \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

где C — постоянная интегрирования.

Если температура приближается к равновесному значению, то $x \rightarrow 1$, $\operatorname{arctg} x \rightarrow \pi/4$ и $\ln(1+x) \rightarrow \ln 2$, таким образом,

$$\ln \frac{T' - T}{T'} = C - 4Bt.$$

Величина $(T' - T)$ изменяется как убывающая по t экспонента.

ЗАДАЧА 23

Поглощение. Закон Кирхгофа

I

1. Параллельный пучок монохроматического света распространяется в поглощающей жидкости. Обозначим через I_0 интенсивность в точке, принятой за начало отсчета, и через K — коэффициент поглощения. Найдите выражение, которое позволит определить интенсивность I_x после того, как пучок пройдет сквозь слой толщиной x ; найдите также оптическую плотность D в этой области.

2. Определите порядок величины ошибок в K и D при относительной ошибке ε в отношении I_0/I_x .

3. Рассматриваемая поглощающая среда представляет собой пластинку из цветного стекла с параллельными гранями толщиной x . Она помещается перпендикулярно пучку с интенсивностью I_0 ; измеряется интенсивность I_1 проходящего света.

Отражения от граней пластинки так ослабляют пучок, что I_1 не может рассматриваться как I_x без введения ошибки ε' в отношении I_0/I_x . Оцените ε' , принимая в качестве показателя преломления стекла величину $3/2$ и для воздуха — единицу. Как измерить оптическую плотность этой поглощающей пластинки, чтобы предотвратить возникновение ошибки? Пучками, возникающими в результате многочисленных внутренних отражений, пренебречь.

II

1. Рассмотрим однородное пламя, излучение которого подчиняется закону Кирхгофа и которое, по предположению, излучает монохроматический свет. Покажите, что интенсивность излучения I_x этого пламени толщиной x стремится к пределу по мере неограниченного возрастания x . Обозначим через $l_1 dx$ энергию свечения, через $a_1 dx$ коэффициент поглощения бесконечно тонкой пленкой толщиной dx излучения с длиной волны λ и обозначим через $\mathcal{L}$ яркость черного тела при температуре пламени.

2. Что произойдет, если излучение не строго монохроматично?

РЕШЕНИЕ

I

1. Интенсивность параллельного пучка, определяемая по освещенности, которую он создает на поверхности и которая в данном случае постоянна, пропорциональна потоку излучения, так что закон изменения интенсивности в поглощающей среде записывается в виде

$$-dI = KI_0 dx,$$

следовательно,

$$I_x = I_0 \exp(-Kx). \quad (1)$$

Отношение I_x/I_0 есть коэффициент пропускания вещества толщиной x . Коэффициент поглощения равен $(I_0 - I_x)/I_0$. Оптическая плотность определяется выражением

$$D = -\lg \frac{I_x}{I_0} = \lg \frac{I_0}{I_x} = \frac{1}{2,3} Kx. \quad (2)$$

Оптическая плотность пропорциональна расстоянию, пройденному в среде.

2. Принимаем

$$A = \frac{I_0}{I_x} = \exp(Kx), \quad (3)$$

$$dA = x \exp(Kx) dK, \quad \varepsilon = \frac{dA}{A} = x dK,$$

$$dD = \frac{1}{2,3} \frac{dA}{A}, \quad \frac{dD}{D} = \frac{\varepsilon}{\ln A} = \frac{dK}{K}.$$

3. Коэффициент отражения от одной грани пластинки при нормальном падении равен

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2.$$

Интенсивность излучения, проходящего через входную грань, равна

$$I'_0 = I_0(1 - R).$$

На выходной грани она уменьшается до величины

$$I' = I'_0 \exp(-Kx).$$

Затем излучение подвергается второму отражению, и интенсивность на выходе равна

$$I_1 = I' (1 - R) = I_0 (1 - R)^2 \exp(-Kx). \quad (4)$$

Сравнивая (1) и (4), можно видеть, что

$$I_1 = I_x (1 - R)^2.$$

В результате отражений величина A , определяемая (3), уменьшается на

$$\Delta A = \frac{I_0}{I_1} - \frac{I_0}{I_x},$$

следовательно,

$$\varepsilon' = \frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{(1 - R)^2} - 1 = \frac{R(2 - R)}{(1 - R)^2} \approx 2R.$$

Эти значения приближаются друг к другу, когда R мало. Действительно,

$$R = \left(\frac{1,5 - 1}{1,5 + 1} \right)^2 = \frac{1}{25},$$

$$\varepsilon' = 0,08.$$

Чтобы избежать ошибки, вызванной отражениями, необходимо произвести два измерения интенсивности проходящего луча для разных толщин x_1 и x_2 . Пусть D' будет оптической

плотностью, возникающей благодаря отражениям. Тогда имеем

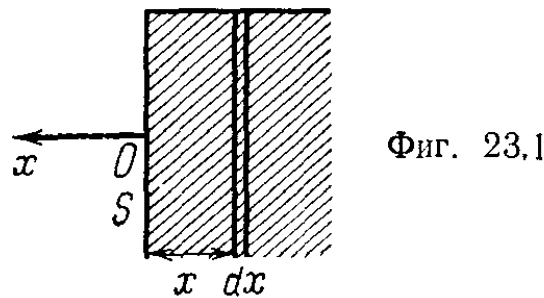
$$D_1 = D' + \frac{1}{2,3} K x_1, \quad D_2 = D' + \frac{1}{2,3} K x_2,$$

следовательно,

$$D_1 - D_2 = \frac{1}{2,3} K (x_1 - x_2).$$

II

1. Сравните это пламя с изотермическим объемом, ограниченным в точке O плоскостью, нормальной к оси Ox (фиг. 23.1).



Изменение интенсивности l_x при прохождении сквозь тонкую пленку толщиной dx обусловлено излучением $l_1 dx$ и поглощением $-a_1 l_x dx$ по закону Бера. Отсюда

$$dl_x = -a_1 l_x dx + l_1 dx = a_1 (\mathcal{L} - l_x) dx,$$

так как $l_1 = a_1 \mathcal{L}$, получаем

$$\frac{dl_x}{\mathcal{L} - l_x} = a_1 dx.$$

При $x = 0$ $l_x = l_1$, следовательно, $\ln(\mathcal{L} - l_1)/(\mathcal{L} - l_x) = a_1 x$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} - l_x &= (\mathcal{L} - l_1) \exp(-a_1 x), \\ l_x &= \mathcal{L} [1 - \exp(-a_1 x)] + l_1 \exp(-a_1 x). \end{aligned}$$

При $x \rightarrow \infty$ $l_x \rightarrow \mathcal{L}$.

2. Если мы имеем дело с набором излучений, коэффициент поглощения которых не постоянен, то значение коэффициента суммарного поглощения очевидно зависит от распределения энергии в источнике излучения. Будем считать, что источник подчиняется закону Кирхгофа $l_\lambda = a_\lambda \mathcal{L}_\lambda$, суммарная интенсивность равна

$$l = \int l_\lambda d\lambda = \int a_\lambda \mathcal{L}_\lambda d\lambda$$

и коэффициент суммарного поглощения равен

$$a = \frac{l}{\mathcal{L}} = \frac{\int a_\lambda \mathcal{L}_\lambda d\lambda}{\int \mathcal{L}_\lambda dx},$$

следовательно,

$$\frac{l}{a} = \mathcal{L} = \int \mathcal{L}_\lambda d\lambda.$$

В том случае, если излучение падает на тело, которое полностью поглощает в рассматриваемом спектральном диапазоне, к данной системе применим закон Кирхгофа.

ЗАДАЧА 24

Параметры Стокса. Представление Пуанкаре. Матрицы Мюллера

I

Параметры Стокса

Состояние поляризации монохроматической световой волны может быть охарактеризовано четырьмя величинами, имеющими одинаковую размерность и известными как параметры Стокса. Ими являются

$$S_0 = a^2 + b^2, \quad S_1 = a^2 - b^2, \quad S_2 = 2ab \cos \varphi, \quad S_3 = 2ab \sin \varphi, \quad (1)$$

где a и b — амплитуды колебаний вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений Oy и Oz в плоскости волны, и φ — разность фаз между ними.

1. Эти четыре параметра не независимы. Найдите соотношения, которые существуют между их квадратами.

2. Что представляет собой параметр S_0 ? Чему равны эти четыре параметра для волны, линейно-поляризованной вдоль направления Oy , вдоль направления Oz и под углом 45° ; для света с правой круговой поляризацией, с левой круговой поляризацией и для естественного света [в этом последнем случае в (1) используйте средние значения амплитуды]?

3. Докажите соотношения

$$S_1 = S_0 \cos 2\beta \cos 2\theta, \quad S_2 = S_0 \cos 2\beta \sin 2\theta, \quad S_3 = S_0 \sin 2\beta, \quad (2)$$

где β — угол, тангенс которого равен отношению осей эллиптически поляризованного колебания, и θ — угол, который образует главная ось эллипса с направлением Oy .

II

Сфера Пуанкаре

Предыдущие уравнения показывают, что состояние поляризации монохроматического колебания данной интенсивности может быть представлено на поверхности сферы радиусом S_0 точкой M , широта которой 2β и долгота 2θ ; S_1 , S_2 , S_3 — декартовы координаты этой точки (фиг. 24.1).

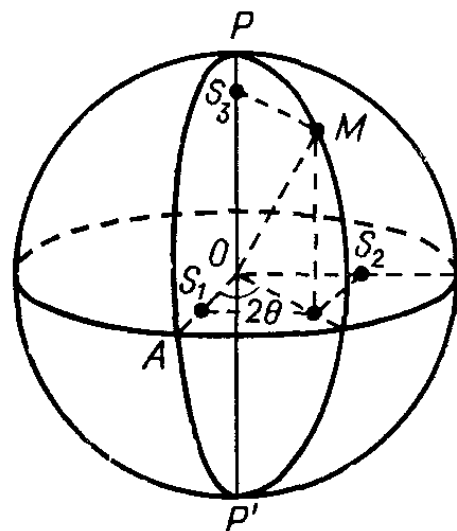
1. Амплитуды a и b относительно точки M можно представить себе как компоненты линейно-поляризованного колебания,

образующего угол α с осью Oy . Как углы α и φ представлены на сфере?

2. Какие точки на сфере соответствуют направлениям Oy и Oz ? Каково геометрическое место точек, представляющих колебания с линейной поляризацией, с круговой поляризацией? Что представляют собой точки, расположенные на одной и той же параллели?

3. На основе данных II, 1 сделайте простое геометрическое построение, которое позволит получить точку M , если для линейно-поляризованной волны, падающей под углом α , задается двулучепреломляющая среда с фазовым запаздыванием φ и известными осями.

4. Обобщите предыдущее построение, демонстрирующее действие двулучепреломляющей среды, с фазовым запаздыванием φ на колебание, представленное точкой M . В качестве особого случая рассмотрите четвертьволновую пластинку.



Фиг. 24.1

III

Матрицы Мюллера

Можно представить себе параметры Стокса как четыре компоненты вектора-столбца. Действие поляризатора или системы с известным запаздыванием и ориентацией на световую волну можно представить квадратной матрицей $[M]$, которая, будучи умножена на вектор Стокса для падающего света $[V]$, дает вектор Стокса для выходящего колебания $[V']$:

$$[V'] = [M][V]. \quad (3)$$

Ниже приводятся примеры матриц $[M]$:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$(M_1) \qquad \qquad (M_2) \qquad \qquad (M_3) \qquad \qquad (M_4)$

M_1 — линейная поляризация с направлением пропускания колебания вдоль Oy ,

M_2 — правая круговая поляризация;

M_3 — четвертьволновая пластинка с опережающей осью вдоль Oy ;

M_4 — четвертьволновая пластинка с осью под углом 45° к Oy .

Мы хотим использовать эти методы для получения следующих известных результатов:

1. Действие линейного поляризатора на естественный свет.
2. Действие поляризатора, дающего правую круговую поляризацию, на естественный свет.
3. Действие четвертьволновой пластинки с осью вдоль Oy и Oz на свет с правой круговой поляризацией.
4. Вопрос 3 повторяется для случая пластинки с осью под углом 45° .

В каждом случае найдите компоненты векторов $[V]$ и $[V']$ и проверьте уравнение (3). (Примуществом этого метода расчета является то, что действие последующих поляризаторов и фазовращателей на световую волну приводит к умножению вектора Стокса на матрицу, которая является произведением матриц, соответствующих последующим приборам.)

РЕШЕНИЕ

1

1.

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (4)$$

2. S_0 представляет собой интенсивность колебания. Для света, линейно-поляризованного вдоль Oy , $b = 0$, следовательно,

$$S_0 = S_1 = a^2, \quad S_2 = S_3 = 0.$$

Подобно этому, для света, линейно-поляризованного вдоль Oz ,

$$S_0 = b^2, \quad S_1 = -b^2, \quad S_2 = S_3 = 0;$$

для света, линейно-поляризованного под углом 45° ,

$$S_0 = 2a^2, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 2a^2, \quad S_3 = 0;$$

для света с правой круговой поляризацией

$$S_0 = 2a^2, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 2a^2;$$

для света с левой круговой поляризацией

$$S_0 = 2a^2, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = -2a^2;$$

для естественного света

$$S_0 = 2\langle a^2 \rangle, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0.$$

3. Полученные уравнения требуют применения классических выражений:

$$\begin{aligned} \text{а) } S_3 &= S_0 \sin 2\beta, \quad 2ab \sin \varphi = (a^2 + b^2) \sin 2\beta, \\ &\sin 2\beta = \sin 2\alpha \sin \varphi; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } S_1 &= S_0 \cos 2\beta \cos 2\theta, \quad a^2 - b^2 = (a^2 + b^2) \cos 2\beta \cos 2\theta, \\ &\cos 2\beta \cos 2\theta = \cos 2\alpha; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{в) } S_2 = S_0 \cos 2\beta \sin 2\theta, \quad 2ab \cos \varphi = (a^2 + b^2) \cos 2\beta \sin 2\theta.$$

Тогда, используя (5), получаем

$$\sin 2\alpha \cos \varphi = \cos 2\beta \cos 2\theta,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha \cos \varphi = \operatorname{tg} 2\theta. \quad (7)$$

II

1. Начертите большую окружность, проходящую через точку M и начало отсчета долгот — точку A . В сферическом треугольнике ABM с прямым углом в B (фиг. 24.2) имеем

$$\cos AM = \cos AB \cdot \cos MB,$$

так что, используя (6), получаем

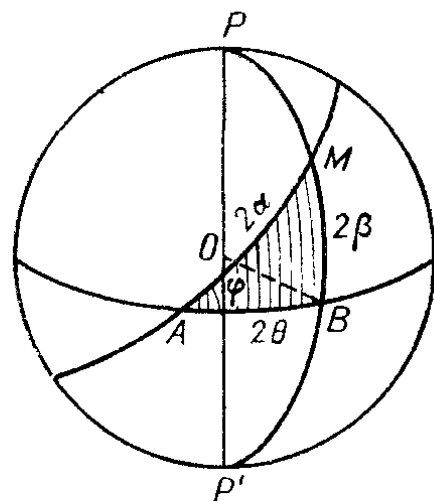
$$AM = 2\alpha$$

и

$$\sin AM = \frac{\sin BM}{\sin \widehat{MAB}}.$$

а из (5)

$$\widehat{MAB} = \varphi.$$



Фиг. 24.2

2. Для линейно-поляризованных колебаний $\beta = 0$; изображающие точки находятся на экваторе. При $\theta = 0$ колебание направлено вдоль Oy и соответствует точке A — началу отсчета долгот. При $\theta = \pi/2$ колебание направлено вдоль Oz и изображается точкой A' на экваторе на другом конце диаметра, проходящего через A ($2\theta = \pi$).

Для света с круговой поляризацией $\beta = \pi/4$; изображающие точки — полюсы P и P' . Точка P изображает свет с правой круговой поляризацией ($0 < \varphi < \pi$), а P' — свет с левой круговой поляризацией ($\pi < \varphi < 2\pi$).

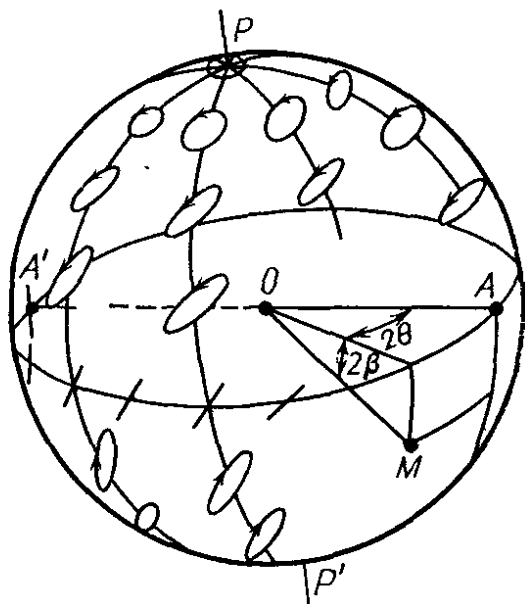
Колебания с правой эллиптической поляризацией находятся в северной полусфере, а колебания с левой — в южной.

Точки вдоль данной параллели изображают эллипсы одного и того же вида, но разного наклона.

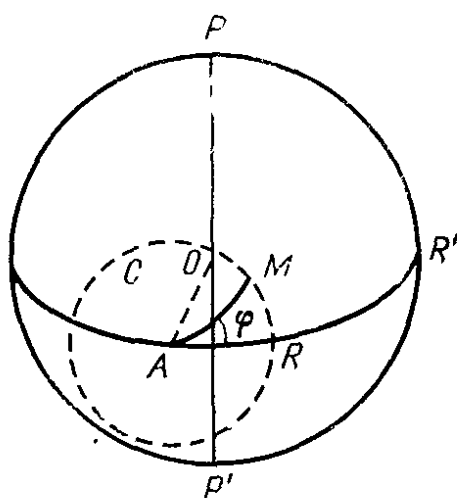
Точки на данном меридиане изображают колебания одинаковой ориентации, эксцентриситет которых изменяется от 0 на экваторе до 1 на полюсах. Фиг. 24.3 иллюстрирует все сделанные выше утверждения.

3. Пусть R — точка на экваторе, которая изображает линейно-поляризованное колебание, A — точка, которая изображает колебание, ориентированное вдоль оптической оси Oy этой (одноосной) двоякопреломляющей системы (фиг. 24.4). Кривая $AR = 2\alpha$. Нарисуйте на поверхности сферы окружность C радиусом AR и с точкой A в центре. Пересечение этой окружности с большой окружностью, проходящей через точку A и образующей угол φ с экватором, дает требуемую точку.

При $\varphi = \pi/2$ точка M находится на одном меридиане с точкой A и оси эллипса направлены вдоль Oy и Oz . Если к тому же $\alpha = \pi/2$, R находится в R' и окружность C — меридиан, нор-



Фиг. 24.3



Фиг. 24.4

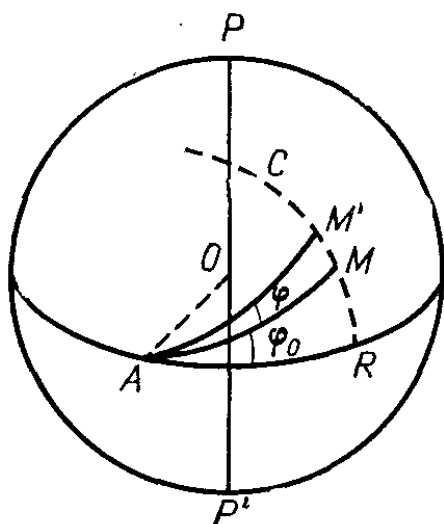
мальный к OA , а M проходит через P или P' , то колебание поляризовано по кругу. При $\varphi = \pi$ колебание — линейно-поляризованное, но с углом α противоположного знака.

4. Пусть AA' будет диаметром, соответствующим ориентации двоякопреломляющей системы, которая воздействует на колебание, изображенное точкой M . Начертите большую окружность, проходящую через A и M (фиг. 24.5). Как было показано в 3, угол φ_0 , который эта окружность образует с экватором, характеризует разность фаз между колебаниями, распространяющимися вдоль нейтральной оси системы, и колебаниями, распространяющимися вдоль оптической оси. К φ_0 добавляется алгебраическое фазовое запаздывание φ , и тогда точка M' получается из M поворотом на угол φ вокруг A .

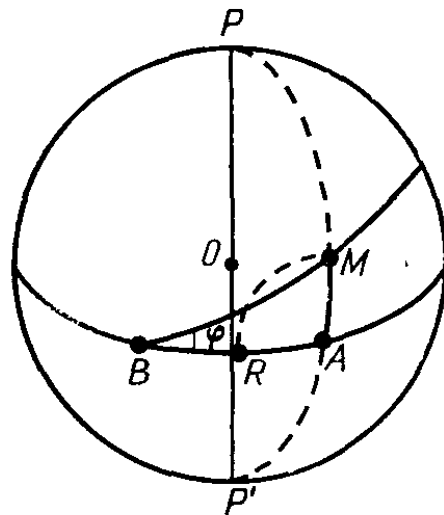
Если $\varphi = \pi/2$, то точка M переходит в точку M'' на большой окружности, проходящей через A и образующей такой угол φ с экватором, что

$$\varphi + \frac{\pi}{2} + \varphi_0 = \pi.$$

В четвертьволновом методе линейно-поляризованное колебание, выходящее из поляризатора, изображается точкой A (фиг. 24.6). Оптические оси этой двоякопреломляющей системы представлены точкой B и точкой на противоположном конце диаметра. Пусть $AB = \pi/2$. Следовательно, точка M , которая изображает колебание, выходящее из системы, находится на



Фиг. 24.5



Фиг. 24.6

меридиане, проходящем через точку A . Сферический треугольник MBA прямоуголен в точках M и A , и из сферической тригонометрии имеем

$$\cos \varphi = \cos MA = \cos 2\beta.$$

Нейтральные оси четвертьволновой пластинки совпадают по построению с концами диаметра AA' . Четвертьволновая пластинка поворачивает точку M на $\pi/2$ вокруг A , и выходящее колебание изображается точкой R . Оно линейно-поляризовано, и $AR = AM = 2\beta$.

III

Результаты, полученные в 1, 2, дают следующие выражения для вектора Стокса (в предположении, что падающее колебание имеет интенсивность, равную единице):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ (V_1) \quad (V_2) \quad (V_3) \quad (V_4) \quad (V_5)$$

V_1 — естественный свет; V_2 — свет, линейно-поляризованный вдоль Oy ; V_3 — свет, линейно-поляризованный вдоль Oz ; V_4 —

свет, линейно-поляризованный под углом 45° , и V_5 — свет с правой круговой поляризацией.

Рассмотрим детально операцию $[V'] = [M][V]$. Правило умножения матриц дает следующее выражение для компоненты V'_{ic} вектора $[V']$, соответствующей строке i и столбцу c :

$$V'_{ic} = \sum_i M_{li} V_{ic},$$

где M_{li} — член из строки i матрицы $[M]$ и V_{ic} — член с тем же индексом i в столбце c вектора $[V]$.

Для $[V]$ и $[V']$ величина c может быть только единицей. Таким образом,

$$\begin{aligned} V'_{11} &= M_{11}V_{11} + M_{12}V_{21} + M_{13}V_{31} + M_{14}V_{41}, \\ V'_{21} &= M_{21}V_{11} + M_{22}V_{21} + M_{23}V_{31} + M_{24}V_{41}, \\ V'_{31} &= M_{31}V_{11} + M_{32}V_{21} + M_{33}V_{31} + M_{34}V_{41}, \\ V'_{41} &= M_{41}V_{11} + M_{42}V_{21} + M_{43}V_{31} + M_{44}V_{41}. \end{aligned}$$

1. В данном случае $[V'] = [M_1][V_1]$, так что

$$\begin{aligned} V'_{11} &= 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1, \\ V'_{21} &= 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1, \\ V'_{31} &= 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0, \\ V'_{41} &= 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0, \end{aligned}$$

затем, учитывая, что множитель для $[M_1]$ равен $1/2$, для вектора $[V']$ получим

$$[V'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Можно видеть, что это выражение идентично $[V_2]$ с точностью до множителя $1/2$, который показывает уменьшение интенсивности за счет поляризации.

2. Подобным путем находим, что $[M_2][V_1] = [V_4]$ с точностью до множителя $1/2$ также вследствие поляризации.

3. $[M_3][V_5] = [V_4]$ — линейно-поляризованный свет с направлением колебаний под углом 45° .

4. $[M_4][V_5] = [V_3]$ — линейно-поляризованный свет с направлением колебаний вдоль Oz .

ЗАДАЧА 25

Формулы Френеля. Двоякопреломляющая призма

1. Вспомните выражения для отражения и пропускания монохроматического параллельного пучка света, падающего из вакуума на поверхность плоской изотропной преломляющей среды с показателем преломления n . Обозначим через r_n и r_p амплитудные коэффициенты отражения, где индекс p соответствует случаю, когда колебания будут параллельны плоскости падения, и индекс n — случаю, когда они нормальны к этой плоскости. Соответствующие коэффициенты пропускания обозначим через t_p и t_n .

2. Примените результаты 1 к следующим двум вопросам. Стекла́нная призма A , угол при вершине которой равен 60° , имеет для исследуемого излучения показатель преломления 1,52. На грань AB призмы падает параллельный монохроматический пучок этого излучения, который перпендикулярен стороне A и направлен под таким углом, что отклонения от пучка, выходящего из грани со стороной AC , минимальны. Падающий пучок линейно-поляризован так, что его колебания составляют угол 45° с плоскостью падения. Чему равен угол, образованный выходящими колебаниями с плоскостью падения?

3. Каким образом необходимо изменить угол BAC призмы и поляризацию падающего света, чтобы при отражении пучка на входе и выходе в стеклянной призме не было световых потерь?

4. Теперь будем считать, что призма сделана из исландского шпата; она тщательно вырезана таким образом, что сечение ABC представляет собой равносторонний треугольник, где грань BC — плоская и полированная. Ось кристалла параллельна плоскости ABC . Покажите, что параллельный пучок линейно-поляризованного монохроматического света, падающий нормально на грань AB и распространяющийся с направлением колебаний, составляющим угол 45° с плоскостью ABC , полностью отражается на грани BC , но на выходе из призмы на грани со стороной AC он эллиптически поляризован. Пренебрегите потерями при отражении на входе и выходе из призмы, так как они малы вблизи нормального падения, и укажите, как выходящие эллиптически поляризованные колебания зависят от высоты h треугольника ABC и от двух главных показателей преломления шпата $n_o = 1,65$ и $n_e = 1,48$.

5. Наконец, будем считать, что ось кристалла нормальна к входной грани со стороной AB , т. е. параллельна падающему пучку. Покажите, что тогда на выходе из призмы имеются два

различных пучка, которые отразились от BC . Определите направление каждого из выходящих пучков и укажите, с какими направлениями колебаний они распространяются.

РЕШЕНИЕ

2. Мы имеем (фиг. 25.1)

$$n \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{D+A}{2} \quad \text{и} \quad D = 2i - A, \quad r = \frac{A}{2} = 30^\circ,$$

$$\sin \frac{D+A}{2} = 1,52 \cdot 0,500 = 0,760, \quad \frac{D+A}{2} = 49^\circ 28' = i.$$

Используем соответствующее выражение

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \cos(i - r) \operatorname{tg} \alpha_i, \quad \alpha_i = 45^\circ, \quad \operatorname{tg} \alpha_i = 1.$$

Пучок выходит из грани под тем же углом

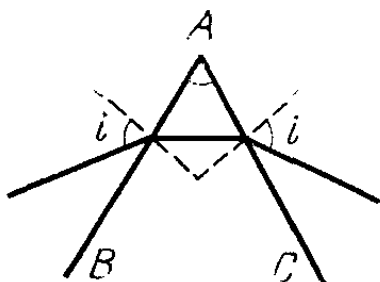
$$\operatorname{tg} \alpha_t = \cos^2(i - r),$$

$$i - r = 49^\circ 28' - 30^\circ = 19^\circ 28', \quad \cos(i - r) = 0,94293,$$

$$\cos^2(i - r) = 0,88912.$$

$$\alpha_t = 41^\circ 39'.$$

3. Коэффициент отражения равен нулю для колебаний в плоскости падения при угле Брюстера. Следовательно, необходимо



Фиг. 25.1

сделать падающий пучок поляризованным так, чтобы направление колебаний было нормальным к плоскости падения, а угол падения таким, чтобы $\operatorname{tg} i_B = n$, откуда

$$i_B = 56^\circ 40'.$$

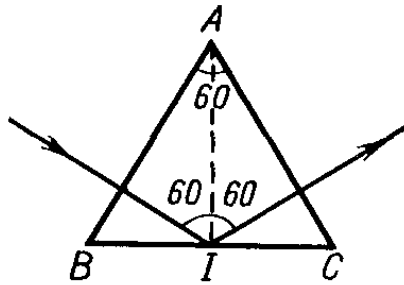
Чтобы пучок выходил под углом Брюстера, необходимо выполнение условия $A' = 2i$. Таким образом,

$$\sin r = \cos i_B, \quad r = 90^\circ - i_B = 33^\circ 20',$$

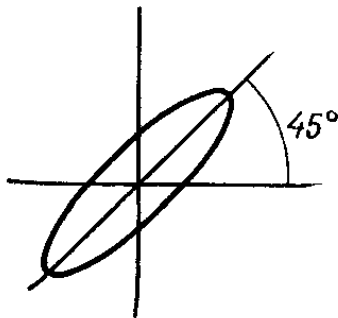
$$A' = 66^\circ 40', \quad A' - A = +6^\circ 40'.$$

4. Падение в точке I происходит под углом 60° (фиг. 25.2, а), следовательно, $\sin i = 0,866$ больше, чем $1/n_e = 0,675$ и $1/n_o = 0,606$. Таким образом, происходит полное внутреннее отраже-

ние. Обыкновенная и необыкновенная волны распространяются нормально к оси, так что отраженные обыкновенный и необыкновенный лучи смешаны на выходе. Однако они поляризованы: обыкновенный луч — в плоскости главного сечения, необыкновенный — нормально к этой плоскости. Так как колебания когерентны на входе, где одно главное направление призмы параллельно, а другое перпендикулярно стороне, двойное лучепреломление приводит к появлению разности $n_o - n_e$. Пройденное рас-

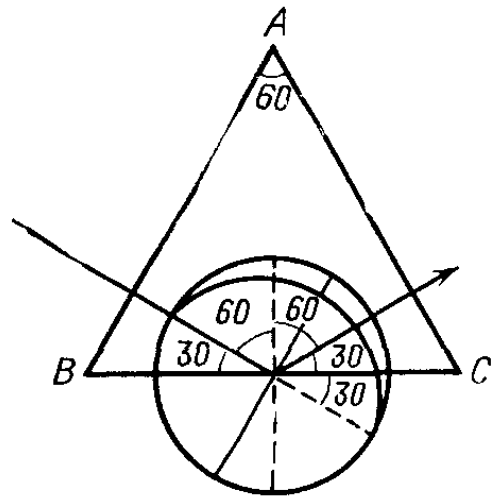


а



б

Фиг. 25.2



Фиг. 25.3

стояние $h \sin 30^\circ = h/2$. Известно, что при $\alpha = 45^\circ$ эллипс ориентирован так, что его оси направлены под углом 45° к осям призмы¹⁾, и отношение его осей равно такому $\operatorname{tg} \beta$, что $\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} \varphi$ (фиг. 25.2, б):

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{h}{2} (n_o - n_e) = \frac{\pi h}{\lambda} \cdot 0,17.$$

5. Падающие лучи не подвергаются двойному лучепреломлению вплоть до точки на BC (фиг. 25.3). Они полностью отражаются при угле 60° , т. е. в направлении, образующем угол $\theta = 60^\circ$ с оптической осью. Нормали к отраженным волнам остаются смешанными, но для одной волны показатель преломления равен n_o ,

¹⁾ При описании явлений в одноосном кристалле автор применяет термин «оптические оси» или оси, под которыми подразумеваются оси эллипсоида диэлектрической постоянной, определяющие главные направления кристалла. — Прим. перев.

а для другой равен такому n , что

$$\frac{n^2 \sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{n^2 \cos^2 \theta}{n_0^2} = 1,$$

$$n^2 \left(\frac{3}{4 \cdot 2,19} + \frac{1}{4 \cdot 2,72} \right) = 1 = n^2 \frac{1}{0,434},$$

$$n^2 = 2,304, \quad n = 1,517.$$

Соответствующие лучи разделены: обыкновенный луч, направление которого совпадает с волновой нормалью, падает на грань со стороной AC под прямым углом и выходит без отклонений. Его колебание нормально к плоскости рисунка. Необыкновенный луч образует с обыкновенным лучом угол, который определяется выражением

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{(n_e^2 - n_0^2) \operatorname{tg} \theta}{n_e^2 + n_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{(2,19 - 2,72) 1,732}{2,19 + 2,72 \cdot 3} = -0,088,$$

$$\zeta = -5^\circ 3'.$$

Знак минус означает, что необыкновенный луч образует угол $54^\circ 58'$ с нормалью к BC . Угол падения на AC равен ζ и угол отражения равен

$$\sin i_e = 1,517 \cdot \sin 5^\circ 3' = 1,517 \cdot 0,0877 = 0,1335,$$

$$i_e = 7^\circ 40'.$$

ЗАДАЧА 26

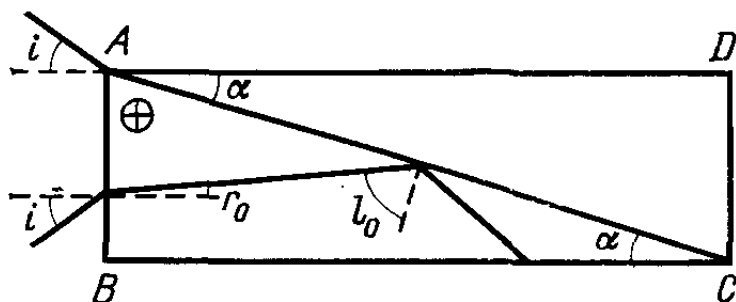
Поле поляризующих призм

Поляризующая призма из шпата имеет форму параллелепипеда, грань $ABCD$ которого (фиг. 26.1 и 26.2) нормальна к оптической оси. Плоскость среза содержит оптическую ось и лежит вдоль линии AC . Две половины призмы разделены слоем с параллельными гранями, образованным либо из прозрачного клея с показателем преломления $n = 1,540$, либо из слоя воздуха. Определите в обоих случаях максимальный угловой диапазон поляризатора для лучей, нормальных к оптической оси, т. е. сумму углов, которые могут быть образованы этими лучами с каждой стороны нормали к грани со стороной AB таким образом, чтобы при этом выходящий пучок был поляризован. Определите также величину этого диапазона, если углы симметричны по отношению к нормали. Рассчитайте соотношение $R = L/h$ длины AD призмы к ее высоте AB . Главные показатели преломления шпата равны $n_0 = 1,658$ и $n_e = 1,486$.

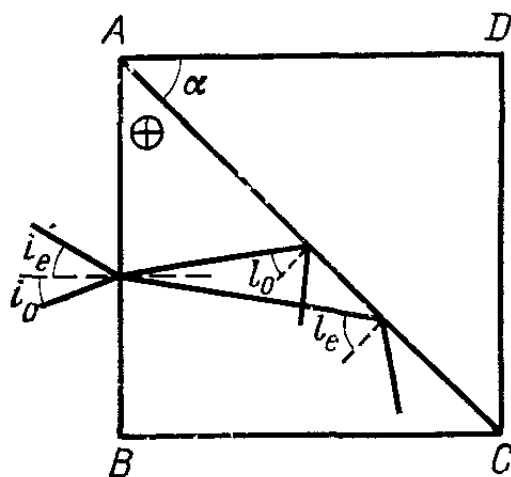
РЕШЕНИЕ

Распространение света нормально к оптической оси, и направление лучей совпадает с нормалью к волновой поверхности

1. Обыкновенный луч с более высоким показателем преломления гасится полным отражением в случае, когда между половинками призмы содержится клей. Диапазон ограничен сверху (фиг. 26.1) углом падения i , соответствующим направлению AC



Фиг. 26.1



Фиг. 26.2

преломленного необыкновенного луча, угол преломления которого равен углу α , определяющему форму призмы:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{L} = \frac{1}{R}, \quad (1)$$

и в точке A имеем

$$\sin i = n_e \sin \alpha. \quad (2)$$

Снизу диапазон ограничен условием, по которому угол преломления r обыкновенного луча должен быть таким, чтобы угол падения этого луча на плоскость среза AC по меньшей мере был бы равным предельному углу l_0 , определяемому для среды шпат — клей соотношением

$$\sin l_0 = \frac{n}{n_0}.$$

Тогда

$$l_0 = \frac{\pi}{2} - (\alpha + r_0),$$

следовательно,

$$\cos (\alpha + r_0) = \frac{n}{n_0}. \quad (3)$$

Угол падения, ограничивающий диапазон снизу, таков, что

$$\sin i = n_0 \sin r_0. \quad (4)$$

Объединяя уравнения (1) — (4), получаем

$$\sin i = \frac{n_e}{\sqrt{1 + R^2}}$$

и

$$(n_0^2 - n^2) R^4 + [n_0^2 - n_e^2 - 2n(n + n_e)] R^2 - (n + n_e)^2 = 0.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$R = \frac{L}{h} = 4,93,$$

$$i = 17^\circ 10', \quad \alpha = 11^\circ 30'.$$

Если необходимо найти максимальный симметричный угловой диапазон, то нужно взять $\alpha = r_0$, тогда из (2) находим

$$\cos 2\alpha = \frac{n}{n_0} = 0,9275, \quad \alpha \approx 11^\circ,$$

и из (1) получаем

$$R = \frac{L}{h} = 5,14.$$

Эта призма называется призмой Глазеврука.

2. Условие, при котором обыкновенный луч, падающий на грань со стороной AB в плоскости рисунка над нормалью, полностью отражается на AC , будет тем же, что и раньше, но теперь при $n = 1$ получаем

$$\sin i_0 = n \sin r_0, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha - r_0 \geq l_0, \quad \sin l_0 = \frac{1}{n_0}.$$

Однако необыкновенный луч также может подвергнуться полному отражению, и диапазон будет сверху ограничен условием, что этот луч может вновь выйти на грань CD , откуда

$$\sin i_e = n_e \sin r_e, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha + r_e \leq l_e, \quad \sin l_e = \frac{1}{n_e}.$$

Для того чтобы диапазон был симметричным, необходимо выполнение условия $i_e = i_0$, т. е.

$$\sin i_0 = n_0 \sin r_0 = n_e \sin r_e. \quad (5)$$

В этом случае углы r_0 и r_e малы, так как

$$r_0 + r_e = l_e - l_0 = 5^\circ 11'.$$

Таким образом, вместо (5) можно написать

$$i_0 = n_0 r_0 = n_e r_e,$$

откуда определяется диапазон

$$2i_0 = \frac{2n_en_0}{n+n_0}(r_0+r_e) = \frac{2n_en_0}{n_e+n_0}(l_e-l_0) = 8^\circ 10',$$

и отношение

$$R = \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(l_0+r_0) = \operatorname{ctg}\left(l_0+\frac{i_0}{n_0}\right) = 0,825.$$

Этот поляризатор называется поляризатором Глана. Он много меньше, чем призма Глазebroука, однако световые потери в нем много больше, так как коэффициент отражения на границе шпат—воздух больше, чем на границе шпат—клей.

ЗАДАЧА 27

Вращательная дисперсия

Параллельный пучок белого света проходит через пластинку из шпата толщиной e , помещенную между двумя николями, установленными на погашение света. Оптическая ось пластинки находится под углом 45° к оптическим осям николей. Кроме того, пучок проходит через дифракционную решетку с 500 штрихами на 1 мм и собирающую линзу с фокусным расстоянием 1 м. На белом экране, помещенном в фокальной плоскости, наблюдаются спектры первого порядка дифракции, которые образуются вокруг центральной полосы.

1. На каком расстоянии от центральной полосы будут находиться точки P и Q , в которых фокусируется излучение с длинами волн $\lambda_1 = 0,6$ мкм и $\lambda_2 = 0,7$ мкм?

2. В точках P и Q имеются темные полосы, и мы наблюдаем сорок одну полосу между этими двумя точками. Какова толщина шпата?

3. Рассмотрите белый свет, который, выходя из пластинки шпата, не попадает во второй николь.

а) Каковы длины волн, для которых имеет место линейная поляризация?

б) Каковы длины волн, для которых имеет место круговая поляризация?

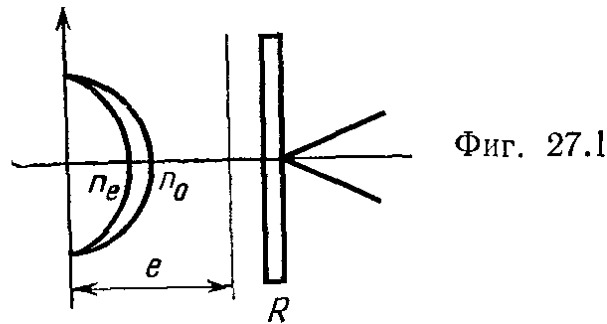
Показатели преломления шпата: $n_0 = 1,658$, $n_e = 1,486$.

РЕШЕНИЕ

1. Параллельный пучок света, который пересекает по нормали одноосную двоякопреломляющую пластинку с параллельными гранями, вырезанную параллельно оси, остается параллельным и не раздваивается.

Действительно, нормали к обыкновенной и необыкновенной волнам совпадают внутри кристалла, и в данном случае совпадают с лучами, так как нормаль к необыкновенной волне находится в экваториальной плоскости эллипсоида показателей преломления (фиг. 27.1). Таким образом, свет падает на решетку по направлению нормали. Главный максимум в первом порядке

Оптическая ось



дифракции для излучения с длиной волны λ , дифрагированного под углом i_1 к оси, определяется выражением

$$\sin i_1 = \frac{\lambda}{d},$$

где d — период решетки. В данном случае $d = 2$ мкм и

$$\lambda = 0,6 \text{ мкм}, \quad \sin i_1 = \frac{0,6}{2} = 0,30, \quad i_1 = 17^\circ 27' 30'',$$

$$\lambda' = 0,7 \text{ мкм}, \quad \sin i'_1 = \frac{0,7}{2} = 0,35, \quad i'_1 = 20^\circ 29' 15''.$$

Расстояния от этих двух изображений до центрального изображения ($i = 0$) равны соответственно

$$r_1 = f \operatorname{tg} i_1 = 0,314 \text{ м}, \quad r'_1 = f \operatorname{tg} i'_1 = 0,373 \text{ м}.$$

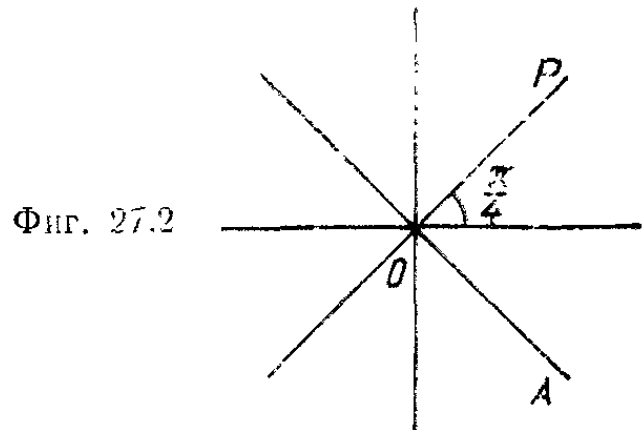
Имеются два спектра в первом порядке дифракции, симметричных относительно центрального изображения.

2. Наблюдаемые полосатые спектры возникают благодаря изменению разности фаз между колебаниями вдоль главных направлений, производимыми двоякопреломляющей пластинкой, в зависимости от длины волны. Линейно-поляризованное колебание OP от первого поляризатора (фиг. 27.2) попадает на шпатель под углом 45° к осям шпателя, одна из которых лежит в направлении оптической оси, а другая перпендикулярна ей; линейно-поляризованное колебание OP имеет равные проекции на этих осях. После выхода из пластинки колебание, параллельное оси и распространяющееся с показателем преломления n_e , меньшим, чем показатель преломления n_o колебания, перпендикулярного оси, имеет оптический путь, превышающий оптический путь

колебания, перпендикулярного оси, на величину

$$\delta = e(n_0 - n_e).$$

Полученная величина не зависит от длины волны, если пренебречь дисперсией двойного лучепреломления. Это приближение, всегда хорошее в рассматриваемой области излучения, задается формулировкой задачи, которая предусматривает только



одно значение для показателей преломления. Однако разность фаз

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi e}{\lambda} (n_0 - n_e)$$

изменяется с длиной волны. Интенсивность света, пропущенного анализатором, определяется выражением

$$I = \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (1)$$

так как оптические оси шпата находятся под углом 45° к направлению колебания OP , пропускаемого поляризатором, скрещенным с анализатором. Интенсивность равна нулю для

$$\varphi = 2K\pi \quad \text{или} \quad e(n_0 - n_e) = K\lambda \quad (K - \text{целое число}). \quad (2)$$

Все длины волн, для которых это соотношение удовлетворяется, т. е. те, для которых толщина пластинки равна толщине одноволновой пластинки, умноженной на K , гасятся, что соответствует темным полосам в спектре.

Чтобы найти толщину пластинки, необходимо знать целое число K (или K') для полосы, создаваемой длиной волны λ (или λ'). Если имеется сорок одна яркая полоса между этими двумя темными полосами, создаваемыми длинами волн λ и λ' , то

$$K = K' + 42.$$

Таким образом,

$$e(n_0 - n_e) = K'\lambda' = (K' + 42)\lambda,$$

следовательно,

$$K' = e \cdot \frac{0,172}{0,7}$$

и

$$e = \frac{42 \cdot 0,6}{0,172 (1 - 0,6/0,7)} = \frac{42 \cdot 0,6 \cdot 0,7}{0,172 \cdot 0,1} = 1026 \text{ мкм.}$$

3. Разность фаз φ изменяется на 2π при переходе от одной темной полосы к следующей. Для длин волн, полосы от которых лежат между этими полосами, колебание, выходящее из шпата, обычно эллиптически поляризовано. Оси эллипса всегда ориентированы вдоль направления колебания OP , определяемого поляризатором, и по направлению нормали OA .

а) Колебание линейно-поляризовано, если

$$\frac{\varphi}{2} = K\pi \quad \text{или} \quad \frac{\varphi}{2} = (2K + 1) \frac{\pi}{2} \quad (K - \text{целое число}).$$

В первом случае мы опять получаем уравнение (2), и колебание, параллельное OP , гасится анализатором. Во втором случае толщина пластинки равна нечетному числу толщин полуволновой пластинки для рассматриваемого излучения; линейно-поляризованное колебание параллельно OA и проходит через анализатор. Освещенность спектра максимальна для длин волн, определяемых соотношением

$$e(n_0 - n_e) = (2K + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

б) Колебание будет поляризованным по кругу при $\operatorname{tg} \varphi/2 = 1$, так что

$$\frac{\varphi}{2} = (2K + 1) \frac{\pi}{4}.$$

Толщина пластинки равна нечетному числу толщин четвертьволновой пластинки. Это имеет место для волн, длины которых удовлетворяют соотношению

$$e(n_0 - n_e) = 2(K + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

ЗАДАЧА 28

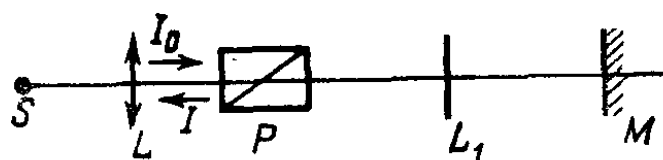
Двукратное прохождение лучей через четвертьволновую пластинку

Монохроматический световой источник излучает параллельный пучок, который проходит через поляризационную призму P . Выходящие световые лучи падают перпендикулярно на кристаллическую четвертьволновую пластинку L_1 (для используемого

излучения) и затем отражаются по нормали от поверхности идеально отражающего металлического зеркала M (фиг. 28.1).

Обозначим через α угол, образованный плоскостью главного сечения поляризатора P и опережающей оптической осью пластинки L_1 , и через I_0 интенсивность света падающего пучка перед прохождением через поляризатор P . Мы хотим определить:

1. Значение интенсивности света I возвращающегося пучка, выходящего из поляризатора. Обсудите частные случаи для разных значений угла α .



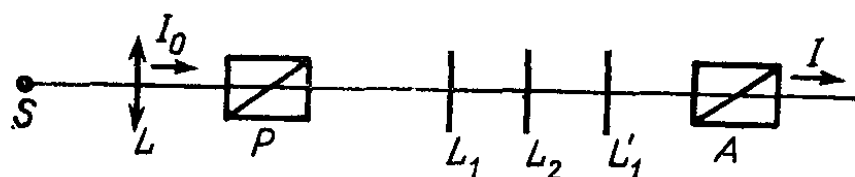
Фиг. 28.1

2. Если равномерно вращать P вокруг падающего пучка с частотой ν ($\alpha = 2\pi\nu t$), то какова будет частота модуляции ν' пучка I ?

В каждом случае можно пренебречь потерями света за счет отражений от стекла.

РЕШЕНИЕ

Отражение по нормали от зеркала приводит к фазовому опережению на π для всех линейно-поляризованных колебаний. Если рассматривать наиболее общее состояние поляризации светового колебания — эллиптическую поляризацию, — то можно



Фиг. 28.2

сказать, что отражение вызывает фазовое опережение на π для обеих эллиптических компонент и, таким образом, вид эллипса не изменяется.

Однако направление распространения света меняется на противоположное при отражении, и на пластинку L_1 попадает эллиптически поляризованное колебание с противоположным по отношению к предыдущему направлением вращения.

В целом опыт подобен тому, который изображен на фиг. 28.2.

Здесь P и A — параллельные поляризатор и анализатор; L_1 — четвертьволновая пластинка; L_2 — полуволновая пластинка с оптическими осями, параллельными осям эллиптически поляризованного колебания, выходящего из пластинки L_1 . Пластинка

L_2 , как и зеркало, придает эллипсу противоположное направление вращения, но не изменяет направление распространения; L'_1 — четвертьволновая пластинка с оптическими осями, параллельными оптическим осям L_1 ; I — направление наблюдения.

1. Линейно-поляризованное колебание, пропускаемое P , равно $a \cos \omega t$, где $a = \sqrt{I_0/2}$. Его компоненты на оптических осях пластинки L_1 могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{на входе} \quad y_0 &= a \cos \alpha \cos \omega t, & z_0 &= a \sin \alpha \cos \omega t, \\ \text{на выходе} \quad y_1 &= a \cos \alpha \cos \omega t, & z_1 &= a \sin \alpha \sin \omega t, \end{aligned}$$

где α — угол, который колебание a образует с опережающей оптической осью y пластинки L_1 . В этом случае получается колебание с левой эллиптической поляризацией и с осями вдоль y и z . Оптические оси пластинки L_2 также направлены вдоль y и z . Она преобразует компоненты y_1 и z_1 в

$$y_2 = a \cos \alpha \cos \omega t, \quad z_2 = -a \sin \alpha \sin \omega t.$$

Пластинка L'_1 дает

$$y' = a \cos \alpha \cos \omega t, \quad z' = -a \sin \alpha \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -a \sin \alpha \cos \omega t.$$

Анализатор A пропускает компоненты

$$y' \cos \alpha = a \cos^2 \alpha \cos \omega t, \quad z' \sin \alpha = -a \sin^2 \alpha \cos \omega t,$$

так что

$$a (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \omega t = a \cos 2\alpha \cos \omega t.$$

Интенсивность равна

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 2\alpha. \quad (1)$$

Она достигает своего максимального значения при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$. В обоих случаях линейно-поляризованное колебание, направленное вдоль Oy и Oz , проходит через всю установку.

Интенсивность равна нулю при $\alpha = \pi/4$. В этом случае свет выходит из L_1 как колебание с левой круговой поляризацией (согласно принятому правилу). Пластинка L_2 преобразует его в свет с правой круговой поляризацией. Затем при помощи пластинки L'_1 он преобразуется в линейно-поляризованное колебание. Однако это последнее колебание перпендикулярно направлению, пропускаемому анализатором, который, следовательно, его гасит.

2. Этот результат сразу получается из (1):

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 4\pi \nu t,$$

где ν — частота вращения поляризатора—анализатора. Следовательно, частота модуляции равна $\nu' = 2\nu$.

ЗАДАЧА 29

Двоякопреломляющий монохроматор

Параллельный пучок света от лампы, наполненной парами натрия, проходит сквозь пару поляризатор — анализатор, направления пропускания которых параллельны и которые разделены пластинкой из кальцита с параллельными гранями, оптическая ось которой фиксирована в плоскости граней. Какой должна быть минимальная толщина этой пластинки, чтобы только одна из D -линий натрия, отстоящих на $6 \text{ \AA}$, прошла через анализатор с максимальной интенсивностью? Следующая таблица дает главные значения показателей преломления кальцита в области D -линий:

$\lambda, \text{ \AA}$	:	5876	5893,
n_e	:	1,48647	1,48641,
n_o	:	1,65846	1,65836.

РЕШЕНИЕ

Для получения минимума, равного нулю, необходимо, чтобы ось пластинки была расположена под углом 45° к главной плоскости поляризаторов. Интенсивность равна

$$I = \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} e (n_o - n_e),$$

так как для пластинки, параллельной оси, главные показатели преломления равны n_o и n_e . Чтобы интенсивность при длине волны λ была максимальной, необходимо выполнение условия

$$e (n_o - n_e) = K\lambda \quad (K - \text{целое число}). \quad (1)$$

Чтобы она в то же время была равна нулю для длины волны $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$, необходимо

$$e (n'_o - n'_e) = \left(K + \frac{1}{2}\right) \lambda' = \left(K + \frac{1}{2}\right) (\lambda + \delta\lambda),$$

но

$$n'_o = n_o - \frac{dn_o}{d\lambda} \delta\lambda, \quad n'_e = n_e - \frac{dn_e}{d\lambda} \delta\lambda,$$

следовательно,

$$e \left\{ n_o - n_e - \left(\frac{dn_o}{d\lambda} - \frac{dn_e}{d\lambda} \right) \delta\lambda \right\} = \left(K + \frac{1}{2}\right) (\lambda + \delta\lambda),$$

и, учитывая (1), получаем

$$\left\{ \frac{e (n_o - n_e)}{\lambda} - e \left(\frac{dn_o}{d\lambda} - \frac{dn_e}{d\lambda} \right) \right\} d\lambda = \frac{\lambda + \delta\lambda}{2}.$$

Наконец, пренебрегая $\delta\lambda$ во втором члене, имеем

$$e = \frac{\lambda^2}{2\delta\lambda} \times \frac{1}{(n_o - n_e) - \lambda [(dn_o/d\lambda) - (dn_e/d\lambda)]}.$$

При значениях

$$\lambda = 5893\text{\AA}, \quad \delta\lambda = 6\text{\AA}, \quad \frac{dn_o}{d\lambda} = \frac{10^{-4}}{17}, \quad \frac{dn_e}{d\lambda} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{17}$$

получаем

$$e \approx 17 \cdot 10^6 \text{\AA} \approx 1,7 \text{ мм.}$$

Такая установка может эффективно служить для разделения компонент дублета натрия.

ЗАДАЧА 30

Опыты Френеля и Араго

I

Коллиматор с вертикальной щелью и астрономический телескоп располагаются таким образом, что их оптические оси находятся на одной и той же горизонтали. Оба прибора фокусируются на бесконечность, и коллиматор освещается монохроматическим светом с длиной волны $0,54 \text{ мкм}$ (зеленая линия ртути). Между объективами этих двух приборов перпендикулярно их общей оси помещается непрозрачный экран с двумя вертикальными окошками F и F' . Окошки имеют одинаковую ширину $a = 1 \text{ мм}$, а их центры, расположенные на одной и той же горизонтали, удалены друг от друга на $d = 3 \text{ мм}$. Нарисовать картину интерференционных полос, которая видна в телескопе, и, зная, что увеличение телескопа равно 20, найти:

- видимый диаметр центрального максимума;
- угловое расстояние между двумя последовательными интерференционными полосами.

II

Поляризатор Николь, главное сечение которого вертикально, располагается между коллиматором и экраном с окнами. Кроме того, имеется прозрачная, легко расщепляющаяся слюдяная пластинка, два главных показателя преломления которой для зеленой линии ртути при нормальном падении для двух взаимно перпендикулярных колебаний в направлении оптических осей L' и L'' слюдяной пластинки имеют значения

$$n' = 1,5998, \quad n'' = 1,5948.$$

Пусть требуется полуволновая пластинка из этой слюды для зеленой линии ртути. Определите ее толщину и покажите, как можно проверить то, что отщепленная пластинка является в точности полуволновой.

III

Из этой полуволновой пластинки вырезаны два образца, имеющих форму удлиненных прямоугольников. Большая сторона AB одного из этих прямоугольников ($ABCD$) параллельна оптической оси L и большая сторона $A'B'$ другого ($A'B'C'D'$) составляет угол $\pi/4$ с направлением оси L . Эти две пластинки помещаются перед непрозрачным экраном, так что их стороны AB и $A'B'$ вертикальны и каждая из них закрывает одно из окон. Объясните, почему при этих условиях интерференционные полосы, ранее видимые, теперь полностью исчезают, и покажите, что для того, чтобы они вновь появились в том же месте, необходимо установить за окнами соответствующим образом ориентированный анализатор Николя.

IV

Можно ли, поместив соответствующим образом ориентированную, закрывающую все поле тонкую слюдяную пластинку и поворачивая анализатор Николя, сделать полосы постоянно видимыми, но смещающимися непрерывным образом из-за вращения анализатора Николя?

РЕШЕНИЕ

I

Эта задача является видоизменением опытов Френеля и Араго по интерференции поляризованного света.

Полосы Юнга образуются так же, как и в случае естественного параллельного монохроматического светового пучка. Угловое распределение интенсивности света, проходящего через систему окон, дается обычным выражением

$$I = 4I_0 \left[\frac{\sin(\pi a \sin i / \lambda)}{\pi a \sin i / \lambda} \right] \sin^2 \left(\frac{\pi d \sin i}{\lambda} \right), \quad (1)$$

где I_0 — интенсивность дифрагированного света вдоль оси системы, i — угол отклонения луча от первоначального направления в результате дифракции на окнах. Так как увеличение G телескопа, сфокусированного на бесконечность, по определению равно отношению видимых диаметров объекта, рассматривае-

мого через прибор и невооруженным глазом, то для получения требуемой величины необходимо всего лишь умножить результат формулы (1) на G .

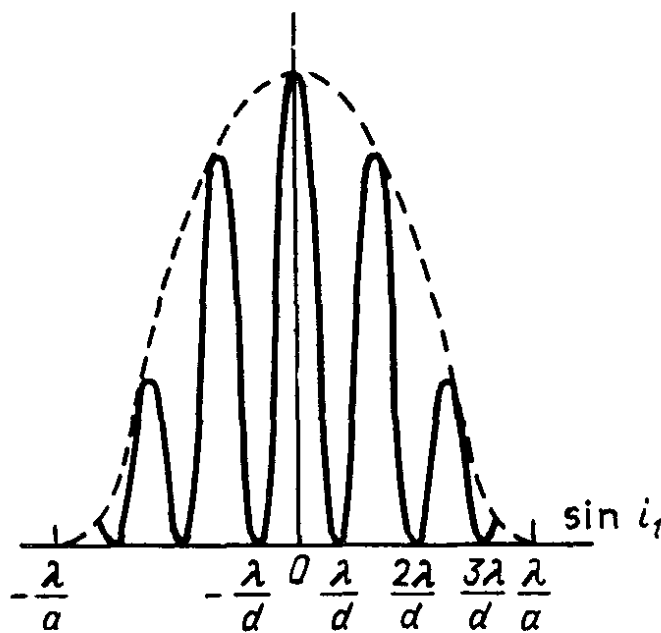
а) Первый множитель в (1), соответствующий дифракции на каждой щели, обращается в нуль при значении $\sin i_1 = \lambda/a$. Таким образом, угловой диаметр центрального максимума имеет величину

$$2G \sin i_1 = 2G \frac{\lambda}{a} = 40 \cdot \frac{0,546}{10^3} = 2,184 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 1^\circ 15'.$$

б) Угловое расстояние между двумя соседними полосами соответствует разности между двумя значениями i , которая обращает второй член (1) в нуль, а именно $\sin i = \lambda/d$, и в телескопе:

$$G \frac{\lambda}{d} = 20 \cdot \frac{0,546}{3 \cdot 10^3} = 0,364 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

Таким образом, в центральном дифракционном максимуме имеется $2,184/0,364 = 6$ интерференционных полос. Так как цен-



Фиг. 30.1

тральная полоса соответствует максимуму интенсивности, то интенсивность третьей яркой полосы с каждой стороны центрального максимума при росте угла дифракции i_1 убывает по величине и ее интенсивность стремится к нулю. Следовательно, наблюдается пять интерференционных полос (фиг. 30.1).

Интенсивность, определяемая вторым множителем в (1), а именно

$$4I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2I_0 (1 - \cos \varphi), \quad (2)$$

модулируется изменениями первого множителя,

II

Толщина полуволновой пластинки равна

$$e = \frac{\lambda}{2(n' - n'')} = \frac{0,546}{2 \cdot 0,005} = 54,6 \text{ мкм.}$$

Чтобы проверить это, надо вспомнить, что полуволновая пластинка преобразует линейно-поляризованное колебание в линейно-поляризованное колебание. Помещая ее при любой ориентации между скрещенными поляризатором и анализатором, можно добиться затемнения поля при вращении анализатора. Такая процедура не обнаружит различия между пластинкой, дающей запаздывание фазы на $\lambda/2$, и пластинкой, дающей запаздывание фазы на $k\lambda/2$ (k — целое число), выясняется лишь, что пластинка полуволновая.

Для увеличения точности используется четвертьволновый метод: угол вращения анализатора, позволяющего получать от нулевого пропускания до полного восстановления освещенности, равен $\varphi/2 = 90^\circ$.

III

Пластинка $ABCD$ не воздействует на ориентацию линейно-поляризованного колебания, заданную поляризатором, который параллелен оптической оси L . Пластинка $A'B'C'D'$ поворачивает это же колебание на 90° , так как оно ориентировано под углом 45° к оптической оси L' . Дифрагированные пучки от этих двух щелей состоят, таким образом, из когерентных линейно-поляризованных колебаний одинаковой амплитуды, но имеющих взаимно перпендикулярную ориентацию. Они суммируются, давая эллиптически поляризованные колебания, которые изменяются в зависимости от разности фаз, но имеют при этом равномерное распределение энергии. Таким образом, более не существует интерференционных полос.

Анализатор пропускает только те линейно-поляризованные колебания, которые параллельны направлению его пропускания. Эти компоненты, которые имеют, следовательно, одну и ту же поляризацию, могут интерферировать. Обозначая через OV и OV' (фиг. 30.2) две линейно-поляризованные компоненты, через OA направление пропускания анализатора, которое образует с OV угол β , через Ov и Ov' соответствующие проекции OV и OV' на OA , имеем

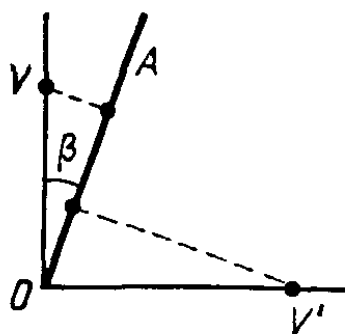
$$Ov = a \cos \beta \cos \omega t, \quad Ov' = a \sin \beta \cos (\omega t - \varphi),$$

где a — общая амплитуда для OV и OV' , φ — их разность фаз, которая зависит от угла дифракции. Суммирование Ov и Ov'

дает интенсивность

$$I = a^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2a^2 \sin \beta \cos \beta \cos \varphi = a^2 (1 + \sin 2\beta \cos \varphi).$$

Для восстановления первоначальной системы полос, распределение интенсивностей которой определяется выражением (1), необходимо иметь $\sin 2\beta = 1$ и $\beta = \pi/4$. Тогда амплитуды Ov и Ov'



Фиг. 30.2

будут равны и контрастность полос будет равна единице. Контрастность равна нулю при $\beta = 0$ или $\beta = \pi/2$, так как только одно из колебаний, OV или OV' , пропускается анализатором и интерференции быть не может.

IV

Предыдущее обсуждение показывает, что контрастность полос зависит от азимута β анализатора. Чтобы полосы не зависели от него, необходимо, чтобы проекции Ov и Ov' не зависели от него, т. е. чтобы колебания OV и OV' были скорее поляризованными по кругу, чем линейно-поляризованными. Это можно осуществить, если поместить перед анализатором четвертьволновую пластинку из слюды с оптической осью под углом 45° к OV и OV' . Два колебания преобразуются в колебания, поляризованные по кругу с противоположными направлениями вращения и той же амплитудой. В любой точке поля одно из них имеет по отношению к другому разность фаз φ . Однако известно, что результирующее колебание в этом случае будет линейно-поляризованным колебанием с азимутом, равным $\varphi/2$. Между двумя точками поля, где разность фаз изменяется на 2π , линейно-поляризованное результирующее колебание поворачивается на π , и в этих точках затемнение поля будет получено при той же ориентации анализатора. Имеется система полос с такими же расстояниями между ними, как и для случая естественного света. Теперь путем поворота анализатора на угол α гасятся все колебания под углом α к вышеуказанным и наблюдается непрерывное смещение системы полос.

Это можно показать более точно посредством расчета. Компоненты OV на оптических осях OQ и OQ' четвертьволновой пла-

стинки (фиг. 30.3) на выходе равны

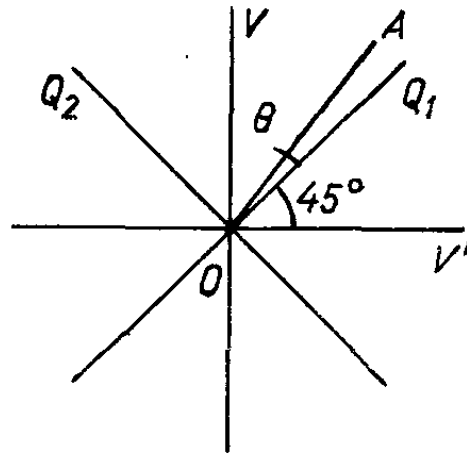
$$OQ_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega t, \quad OQ_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \omega t \quad (\text{правая круговая поляризация}),$$

в то же время компоненты OV' равны

$$OQ'_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \varphi), \quad OQ'_2 = \frac{-a}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (\text{левая круговая поляризация}).$$

Знаки обусловлены учетом того, что OQ_1 является опережающей оптической осью (осью с меньшим показателем преломления).

Фиг. 30.3



Пусть θ будет азимутом анализатора OA по отношению OQ_1 . Проекция колебаний на OA имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega t \cos \theta + \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \omega t \sin \theta &= \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \theta), \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \varphi) \cos \theta - \frac{a}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - \varphi) \sin \theta &= \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \varphi + \theta). \end{aligned}$$

Это два колебания с одним и тем же направлением и с одной и той же амплитудой, они имеют разность фаз $(2\theta - \varphi)$, интенсивность результирующего колебания равна

$$I = 2a^2 \cos^2\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right).$$

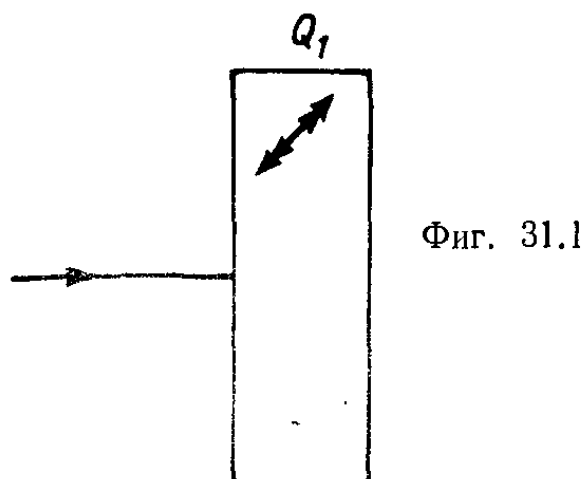
Если $\theta = 0$ или $K\pi$, то имеется система полос, представленная выражением (1). Если θ изменяется, то максимумы находятся при $\theta = \varphi/2$.

ЗАДАЧА 31

Поляризационный интерферометр.
Дифференциальный метод

I

Луч монохроматического света падает по направлению нормали на кварцевую пластинку Q_1 с параллельными гранями и толщиной l . Оптическая ось находится в плоскости рисунка и



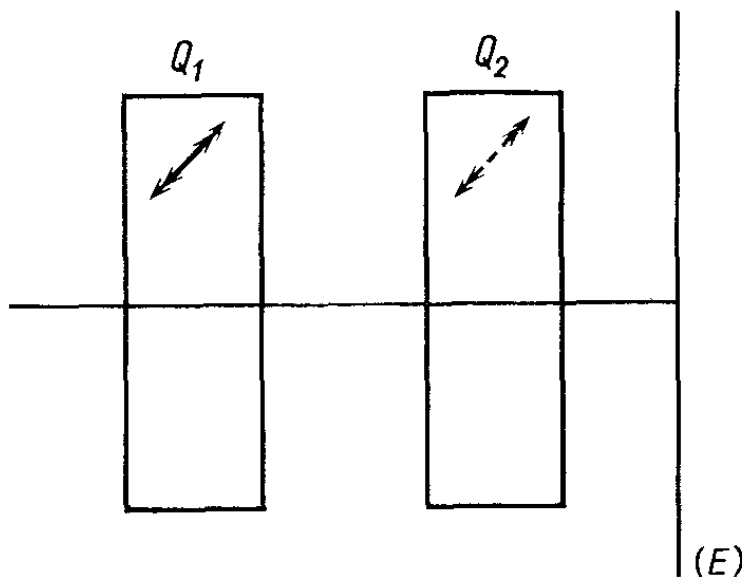
Фиг. 31.1

образует угол 45° с нормалью к пластинке (фиг. 31.1). Считается, что $n_e = 1,533$ и $n_o = 1,544$.

1. Постройте ход лучей в кристалле.
2. Рассчитайте расстояние между выходящими лучами в зависимости от l , n_e и n_o . Укажите состояния их поляризации.

II

Добавляется вторая кварцевая пластинка Q_2 , идентичная Q_1 . Грани обеих пластинок параллельны. Пусть α — угол между



Фиг. 31.2

плоскостями главных сечений этих двух пластинок (фиг. 31.2). Покажите, что в общем случае пластинку Q_2 покидают четыре луча. При $\alpha = 0, 45, 90, 135$ и 180° найдите:

относительные положения лучей на экране E (указывая состояние поляризации каждого луча);

энергию, переносимую каждым лучом, считая, что энергия источника равна единице.

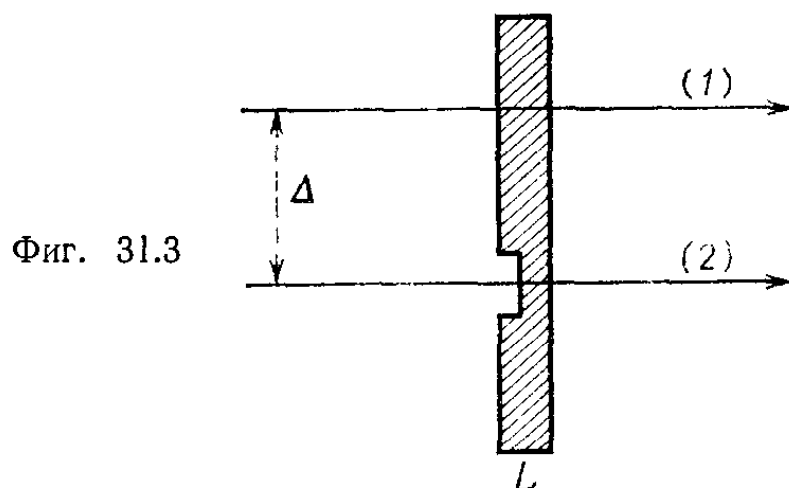
Далее будем считать, что оси пластинок Q_1 и Q_2 параллельны.

III

Поместите перед пластинкой Q_1 поляризатор P , который пропускает только колебания, ориентированные под углом 45° к плоскости рисунка. Между Q_1 и Q_2 располагается полуволновая пластинка, оптические оси которой находятся под углом 45° к плоскости рисунка. Нарисуйте ход лучей через систему и укажите природу колебаний каждого луча.

IV

Поместите за полуволновой пластинкой прозрачную пластинку L , чтобы вызвать изменения в фазе (фиг. 31.3). Обо-



значьте через φ разность фаз между лучами 1 и 2, смещенными на Δ . Какова природа колебаний, выходящих из Q_2 , в случае, когда

$$\varphi = 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \quad \text{и} \quad \varphi = \pi?$$

V

1. Лучи, выходящие из Q_2 , можно заставить интерферировать. В чем заключается функция поляризатора P ? Какой вклад это дает в получение хорошей контрастности?

2. Система освещается плоской волной Σ , параллельной граням кварца. Покажите, что волны, выходящие из Q_2 , смещены

на величину Δ в поперечном направлении. Будем считать, что пластинка L вносит фазовый сдвиг своей канавкой шириной a (фиг. 31.3). Определите освещенность в разных областях изображения как функцию φ .

VI

Вообще говоря, можно обнаружить объекты, вносящие другой фазовый сдвиг, и при этом его не измерять. Поместите позади Q_2 объектив O , сфокусированный на плоскость пластинки L . С работой этого объектива, обладающего заданными характеристиками, связано действие кварцевых пластинок Q_1 и Q_2 таким образом, что промежуток Δ делается меньше, чем предел разрешения объектива O .

Найдите l , считая, что объектив O имеет численное значение апертуры $\sin u = 0,2$ и используемая длина волны $\lambda = 0,5$ мкм.

РЕШЕНИЕ

I

1. Построение Гюйгенса

Волновая поверхность состоит из:

сферы радиусом $1/n_0$, эллипсоида вращения с осями $1/n_0$ и $1/n_e$,	}	точка касания которых лежит на оси x .
--	---	---

Падающая волна делится внутри кристалла на обыкновенную волну Σ_0 и необыкновенную волну Σ_e (фиг. 31.4). Обыкновенная волна проходит в том же направлении, а необыкновенная отклоняется к оси (в случае кристалла кварца).

2. Пересечение эллипсоида с плоскостью рисунка дает эллипс, описываемый уравнением

$$n_0^2 x^2 + n_e^2 y^2 = 1. \quad (1)$$

Касательная в точке N параллельна биссектрисе угла xOy , и, таким образом, $dy/dx = 1$. Используя уравнение (1), получаем

$$1 = -\frac{n_0^2}{n_e^2} \frac{x}{y}, \quad (2)$$

следовательно,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{n_0^2}{n_e^2}. \quad (3)$$

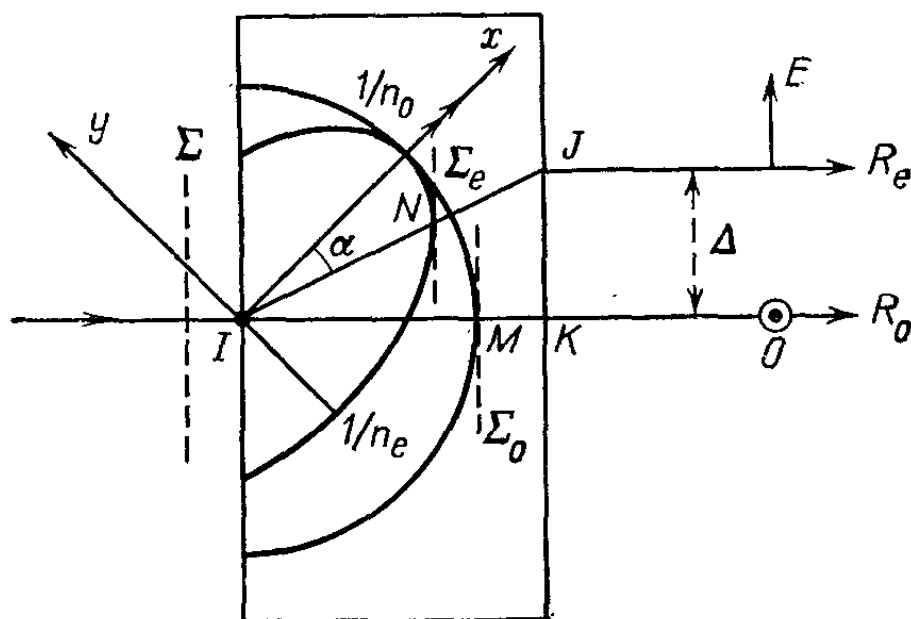
Расстояние между двумя выходящими лучами равно

$$\Delta = l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = l \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = l \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2 + n_o^2}. \quad (4)$$

Так как двойное лучепреломление кварца мало, то можно записать

$$\Delta = l \frac{n_e - n_o}{n} = l \frac{9 \cdot 10^{-3}}{1,55}. \quad (5)$$

Колебания необыкновенного луча находятся в плоскости главного сечения (которое содержит ось и нормаль к входной грани).

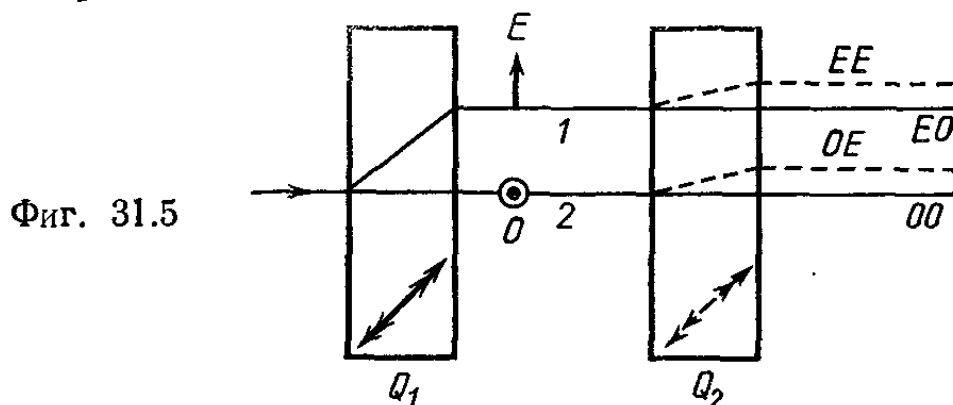


Фиг. 31.4

Колебания обыкновенного луча перпендикулярны плоскости рисунка (фиг. 31.4).

II

Можно видеть, что пластинка Q_1 делит падающее излучение на два луча, расположенных в плоскости главного сечения.



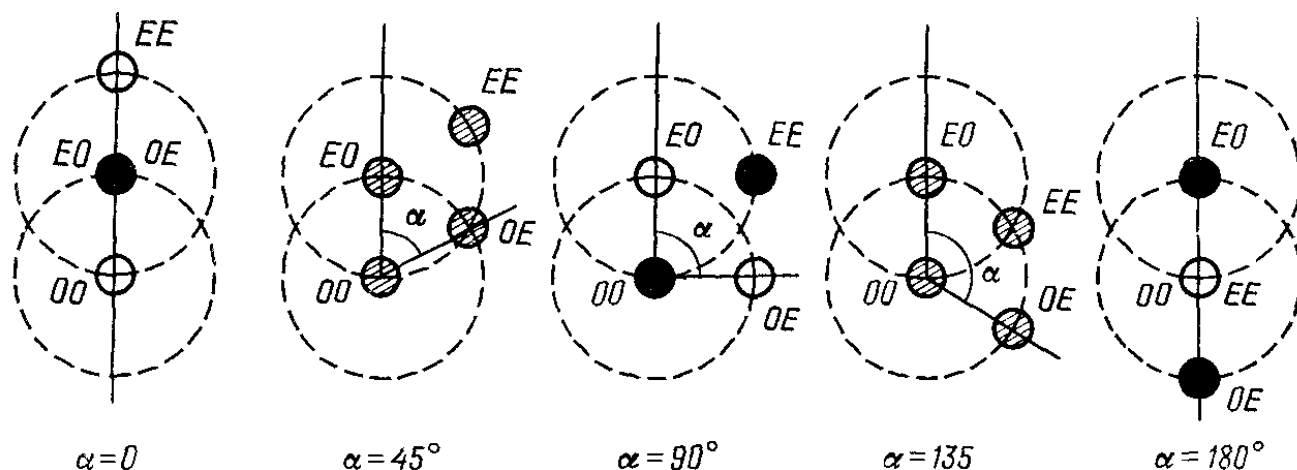
Фиг. 31.5

Возьмем луч 1, падающий на Q_2 . Если колебание E не совпадает с оптической осью Q_2 , то на выходе будут иметься два

параллельных луча в плоскости главного сечения Q_2 с колебаниями EE и EO . Подобно этому, разбивается луч 2, и два луча несут колебания OE и OO (фиг. 31.5).

- $\alpha = 0$ колебания OO и EE лежат в плоскости рисунка и разделены на 2Δ . Каждый луч переносит энергию $1/2$.
 $\alpha = \pi/4$ четыре луча, каждый с энергией $1/4$.
 $\alpha = \pi/2$ два луча, каждый с энергией $1/2$.
 $\alpha = 3\pi/4$ четыре луча, каждый с энергией $1/4$.
 $\alpha = \pi$ два совпадающих луча с энергией $1/2$.

Эти результаты показаны на фиг. 31.6.

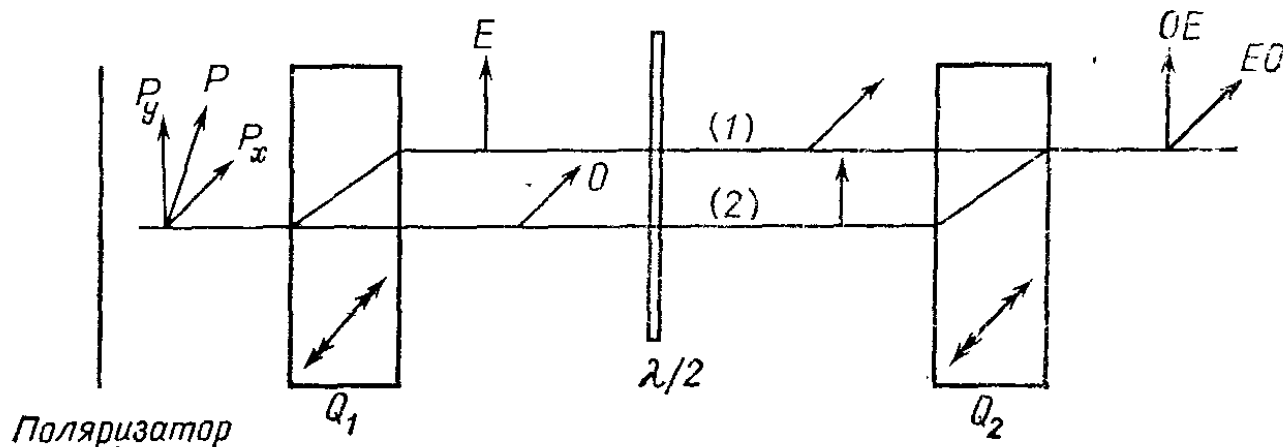


Фиг. 31.6

Примечание. Система из двух идентичных пластинок, образующих угол $\alpha = \pi/2$, называется «пластинкой Савара».

III

Колебание, пропущенное поляризатором P , можно разложить на два взаимно перпендикулярных колебания P_x и P_y ,



Фиг. 31.7

имеющих одинаковую амплитуду (фиг. 31.7). В кристалле Q_1 колебание P_x относится к обыкновенному лучу, а P_y — к необыкновенному. Если не вводится полуволновая пластинка, то полу-

чается картина, изображенная на фиг. 31.6 ($\alpha = 0$). Известно, что полуволновая пластинка преобразует линейно-поляризованное колебание в другое линейно-поляризованное колебание, симметричное по отношению к ее оптическим осям; тот луч, который является необыкновенным в Q_1 , ведет себя (после поворота на 90°) как обыкновенный в Q_2 . И наоборот, обыкновенный луч в Q_1 становится необыкновенным в Q_2 (фиг. 31.7). Колебания E и O при прохождении через Q_1 получают разность фаз, однако EO и OE вновь находятся в фазе после прохождения через Q_2 .

IV

На выходе из Q_2 в общем случае имеется эллиптически поляризованное колебание (образованное двумя линейно-поляризованными колебаниями с разностью фаз φ). Эллипс может быть вписан в квадрат, и его оси совпадают с диагоналями квадрата:

$\varphi = 0$	линейно-поляризованное колебание.
$0 < \varphi < \pi/2$	колебание с правой эллиптической поляризацией.
$\varphi = \pi/2$	колебание с правой круговой поляризацией.
$\pi/2 < \varphi < \pi$	колебание с правой эллиптической поляризацией.
$\varphi = \pi$	линейно-поляризованное колебание.

V

1. Поляризатор делает колебания когерентными. Необходимо добавить анализатор после Q_2 , чтобы сделать колебания вновь параллельными. Контрастность максимальна и равна единице, если колебания имеют одинаковую амплитуду, т. е. если направление пропускания анализатора находится под углом 45° к плоскости рисунка.

2. Волна Σ разбивается на две волны Σ_0 и Σ_E с разностью фаз в продольном и поперечном направлениях. Две волны Σ_{OE} , Σ_{EO} вновь совпадают и находятся в фазе в результате компенсации при помощи пластинки Q_2 . Однако если между Q_1 и Q_2 вносится фазовый сдвиг, то наблюдаются два сдвинутых по фазе объекта, разделенных промежутком Δ (фиг. 31.8):

$\Delta > a$ метод полного разбиения (фиг. 31.9а),

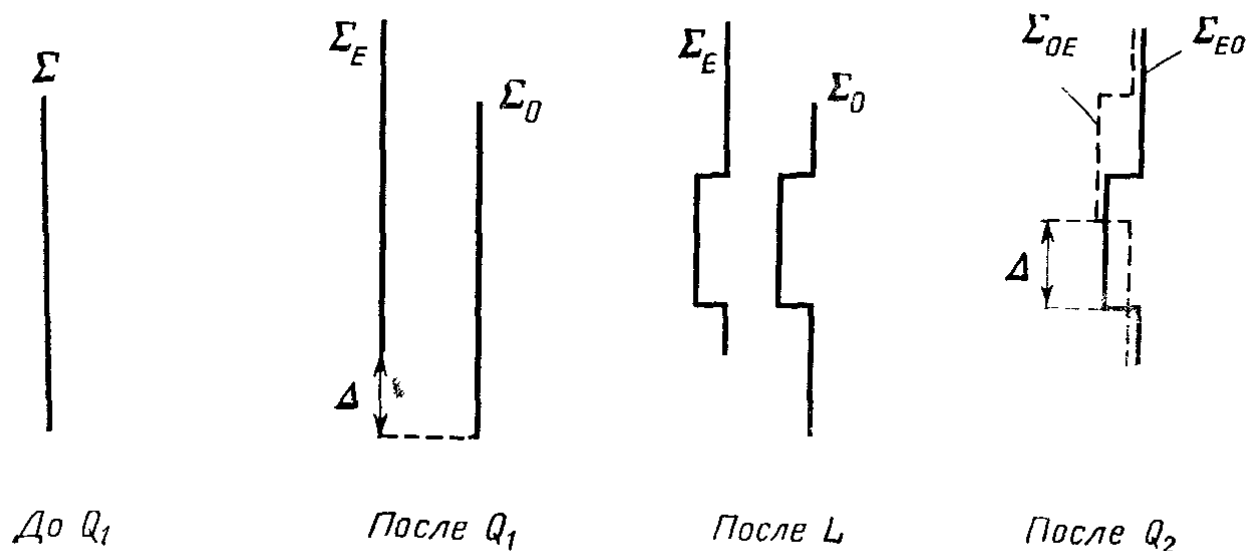
$\Delta < a$ дифференциальный метод (фиг. 31.9б).

Разность фаз и, следовательно, освещенность изменяются в различных областях изображения. Результаты сведены в табл. 31.1.

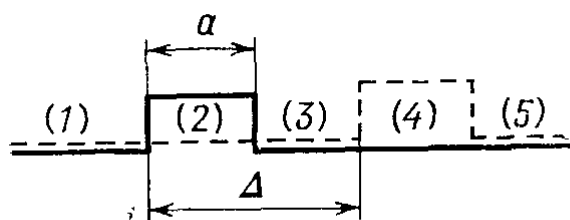
Этот поляризационный интерферометр является интерферометром с равномерной яркостью. Если используется белый свет, то фазовые изменения проявляются в изменении цвета,

Таблица 31.1

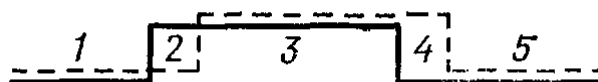
Область	1	2	3	4	5
Разность фаз	0	$+\varphi$	0	$-\varphi$	0
Освещенность	1	$\cos^2 \varphi/2$	1	$\cos^2 \varphi/2$	1



Фиг. 31.8



Фиг. 31.9a



Фиг. 31.9б

VI

Если необходимо обнаружить объекты, вносящие другой фазовый сдвиг, то используется дифференциальный метод и выбирается разбиение меньшее, чем предел разрешения ρ объектива. Для этого требуется

$$\Delta < \rho, \quad (6)$$

следовательно,

$$l \frac{n_e^2 - n_0^2}{n_e^2 + n_0^2} < \frac{1,2\lambda}{2 \sin u},$$

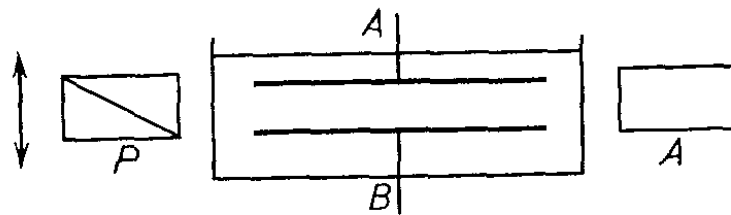
$$l (\text{мкм}) < \frac{1,5 \cdot 1,2 \cdot 0,5}{9 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 0,2}, \quad (7)$$

$$l < 250 \text{ мкм.}$$

ЗАДАЧА 32

Электрическое двойное лучепреломление

Конденсатор с прямоугольными пластинками A и B длиной l , находящимися на расстоянии h (фиг. 32.1), погружен в кювету, содержащую сероуглерод при 22°C . Параллельный пучок света с длиной волны λ (в воздухе) направляется между пластинами параллельно их длинной оси. Этот пучок поляризован поляризатором P , главное сечение которого образует угол α с плоскостью пластинок. Убедившись в том, что грани кюветы, пересекаемые падающим светом, изотропны, к пластинкам A и B прикладывают потенциалы V_1 и V_2 . Определите ориентацию колебаний и эллиптичность света, выходящего из установки. При $\alpha = 45^\circ$



Фиг. 32.1

укажите на рисунке точные положения четвертьволновой пластинки и главного сечения анализатора A , соответствующие полному гашению выходящего луча.

Для расчета примите $l = 20$ см и $h = 4$ мм. В качестве V_1 и V_2 возьмите потенциалы ряда последовательно соединенных 5000 батареек по 2 В, центральную точку источника напряжения заземлите.

Примечание. Известно, что сероуглерод, помещенный в электростатическое поле E_0 , ведет себя как положительный одноосный кристалл с осью, параллельной полю. При 22°C его двулучепреломление характеризуется разностью значений показателей преломления n_e и n_0 , так что

$$n_e - n_0 = 3 \cdot 10^{-14} \cdot \lambda E_0^2;$$

переменные даны в единицах СИ. Пренебрегите влиянием краев пластин конденсатора и считайте, что поле равномерно.

РЕШЕНИЕ

Элемент ведет себя как кристаллическая пластинка с плоскопараллельными гранями, главные направления которой ориентированы вдоль направления Oz электрического поля (т. е. по нормали к пластинкам конденсатора) и вдоль направления Oy , перпендикулярного Oz . Так как кристалл — положительный одноосный, то $n_e > n_0$. Направление необыкновенного колебания Oz является запаздывающим.

Линейно-поляризованное колебание $OP = \sin \omega t$, пропускаемое поляризатором, имеет следующие компоненты вдоль оптических осей на входе в элемент:

$$y_0 = \cos \alpha \sin \omega t, \quad z_0 = \sin \alpha \sin \omega t;$$

на выходе из элемента:

$$y = \cos \alpha \sin \omega t, \quad z = \sin \alpha \sin (\omega t - \varphi),$$

где

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_0).$$

Выражение, данное в задаче, позволяет нам рассчитать двойное лучепреломление. Поле равно

$$E_0 = \frac{V_1 - V_2}{h} = \frac{10^4}{4 \cdot 10^{-3}} = 25 \cdot 10^5 \text{ В/м},$$

$$n_e - n_0 = 3 \cdot 10^{-14} \cdot \lambda \cdot (25 \cdot 10^5)^2$$

и

$$\varphi = \frac{2\pi \cdot 0,20}{\lambda} \cdot 3 \cdot 10^{-14} \cdot \lambda \cdot 625 \cdot 10^{10} = 0,075\pi = 0,236 \text{ рад} = 13,2^\circ.$$

Свет, выходящий из элемента, эллиптически поляризован. Одна ось эллипса параллельна, а другая перпендикулярна направлению падающего линейно-поляризованного колебания OP (фиг. 32.2). Имеем $\sin 2\beta = \sin \varphi$. Отношение осей эллипса равно

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

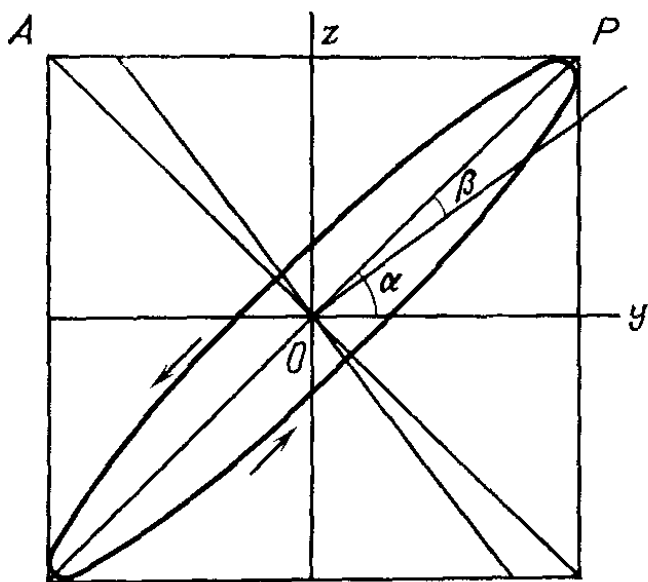
так что

$$\beta = 6,6^\circ.$$

Так как направление Oz является запаздывающим, то мы имеем левую эллиптическую поляризацию.

Выходящий пучок может быть устранен анализатором,

если пропускаемое им колебание линейно-поляризовано. Четвертьволновая пластинка может преобразовать эллиптически поляризованное колебание, выходящее из элемента, в линейно-поляризованное, если главные направления пластинки ориентированы параллельно осям эллипса. Можно сначала установить положе-



Фиг. 32.2

ние четвертьволновой пластинки перед приложением электрического поля, скрестив поляризатор OP и анализатор OA , а затем ввести четвертьволновую пластинку и вращать ее до тех пор, пока не произойдет гашение. Оптические оси четвертьволновой пластинки параллельны OP и OA .

Если опережающая оптическая ось четвертьволновой пластинки помещается вдоль OP , то установлено, что компонента эллиптического колебания OP , запаздывающая на $\pi/2$ по отношению к компоненте, нормальной к ней, после прохождения через четвертьволновую пластинку получит опережение на $\pi/2$. Тогда колебания, распространяющиеся вдоль OP и OA , находятся в фазе, и их результирующее колебание OP' линейно-поляризовано и образует угол β с OP . Тогда можно добиться гашения, устанавливая анализатор сначала на OA и затем на OA' , т. е. поворачивая его на угол β в сторону, противоположную направлению эллиптического вращения.

ЗАДАЧА 33

Вращательная способность. Круговой дихроизм

Используя глаз в качестве детектора, можно изучить поляризационные состояния плоской монохроматической волны излучения паров натрия с $\lambda = 0,589$ мкм; волна проходит через кювету, содержащую жидкость, которая обладает поглощением и естественной вращательной способностью.

I

а) В первом опыте свет линейно-поляризован поляризатором P (фиг. 33.1) и определяется азимут колебания до и после прохождения через кювету, которая имеет длину 0,5 см. Зная, что



Фиг. 33.1

плоскость колебания повернется для наблюдателя по часовой стрелке на угол $\alpha = 1,2^\circ$, и имея в виду, что вращательная способность объясняется круговым двойным лучепреломлением, определите знак и величину разности показателей преломления этой жидкости для света с указанной выше длиной волны, имеющего правую и левую круговую поляризацию.

б) Наклон плоскости колебаний определяется при использовании полузатемненного анализатора, который состоит из полуволновой пластинки L (фиг. 33.1), жестко закрепленной на призме Глезебрука A и закрывающей половину светового пучка. Направление пропускания этой призмы образует малый угол ε с оптической осью пластинки L . Система может быть повернута на известный угол. Объясните действие установки.

II

а) Во второй серии опытов свет поляризован по кругу. Это осуществляется путем использования линейного поляризатора (например, поляризатора Глезебрука) и четвертьволновой пластинки с известными оптическими осями. Используя чертеж, покажите кратко, как можно создать правую и левую круговые поляризации света при помощи этой установки.

б) Какова толщина четвертьволновой пластинки, если она вырезана из кристаллической слюды, главные показатели преломления которой в плоскости среза равны $n = 1,5977$ и $n' = 1,5936$ для излучения паров натрия?

в) Зная ответы на предыдущие вопросы, с помощью соответствующего детектора для светового потока можно установить, что заполненная жидкостью кювета длиной 1 мм пропускает часть интенсивности падающего света с левой круговой поляризацией, равную 0,520, и что подобная же кювета длиной 2 мм пропускает часть интенсивности света, равную 0,320. Подсчитайте коэффициент поглощения жидкости. Почему необходимо измерить его для двух значений длины кюветы?

Повторите этот расчет для света с правой круговой поляризацией; в этом случае интенсивности пропущенного света равны 0,503 и 0,301.

(Вспомните, что для однородного поглощающего вещества относительная потеря интенсивности для монохроматического светового потока F при прохождении через толщину dx равна

$$-\frac{dF}{F} = K dx,$$

где K — коэффициент поглощения.)

III

Найдите уменьшение амплитуды колебаний с правой и левой круговыми поляризациями, проходящих через кювету с жидкостью длиной 0,5 см. Если жидкость освещается линейно-поляризованным светом, покажите, что выходящий свет эллиптически поляризован, и найдите отношение осей.

IV

Повторите измерение вращательной способности, сделанное в I. Теперь, не трогая анализатора, установленного на гашение, поместите между кюветой и анализатором четверть-волновую пластинку, оптические оси которой параллельны оптическим осям полуволновой пластинки. Как нужно повернуть анализатор, чтобы восстановить затемнение? Объясните результат.

V

Абсолютная ошибка в ориентации плоскости колебания, измеренная при помощи анализатора, установленного на гашение, и глаза, изменяется пропорционально корню квадратному из величины светового потока, получаемого анализатором. Какая толщина этой активной поглощающей жидкости сделает относительную ошибку минимальной?

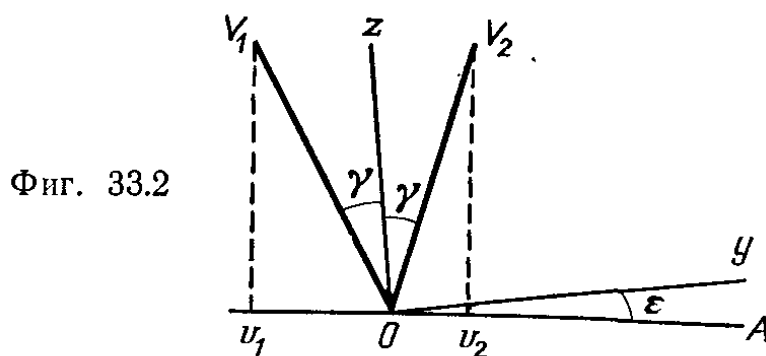
РЕШЕНИЕ

I

а) Имеем

$$\alpha = \frac{\pi l}{\lambda} (n_l - n_r),$$

где α измеряется в радианах. Если вращение происходит для наблюдателя по часовой стрелке, то быстрее всего в среде рас-



пространяются колебания с правой круговой поляризацией, $n_l > n_r$:

$$n_l - n_r = \frac{1,2 \cdot 0,589 \cdot 10^{-4}}{180 \cdot 0,5} = 7,85 \cdot 10^{-7}.$$

б) Пусть Oy и Oz (фиг. 33.2) — направления оптических осей полуволновой пластинки, OA — направление колебания, пропущенного анализатором, и OV_1 — направление линейно-поляризованного колебания пучка, падающего на пластинку. Это

колебание принимает направление OV_2 , симметричное направлению OV_1 относительно Oz для той половины пучка, которая падает на полуволновую пластинку. Пусть γ — угол, образованный OV_1 с Oz . Проекции OV_1 и OV_2 на OA соответственно равны

$$Ov_1 = OV_1 \sin(\gamma + \varepsilon) \quad \text{и} \quad Ov_2 = OV_2 \sin(\gamma - \varepsilon).$$

Интенсивности соответствующих двух пучков после прохождения через анализатор будут иметь вид

$$I_1 = I \sin^2(\gamma + \varepsilon) \quad \text{и} \quad I_2 = I \sin^2(\gamma - \varepsilon).$$

Они равны, если $\gamma = 0$, т. е. если направление OV параллельно Oz . Они малы, так как ε — малый угол; это благоприятное условие для их сравнения при помощи глаза (решение $\gamma \approx \approx \pi/2$ дает слишком большую интенсивность). Тогда можно точно определить азимут плоскости колебания OV до и после введения активной жидкости.

II

а) Направление пропускания поляризатора OP ориентировано под углом 45° к оптическим осям четвертьволновой пластинки. Чтобы получить колебание с левой круговой поляризацией для наблюдателя, который видит свет, выходящий из четвертьволновой пластинки, «опережающая» оптическая ось, т. е. оптическая ось, соответствующая меньшему значению показателя преломления, должна быть направлена вдоль Oy ($n_y < n_z$), и наоборот — для колебания с правой круговой поляризацией.

б) Для четвертьволновой пластинки толщиной l

$$l(n - n') = \frac{\lambda}{4},$$

или

$$l = \frac{0,589}{4(1,5977 - 1,5936)} = 36 \text{ мкм},$$

что можно легко получить из слюды из-за простоты среза.

в) Выражая коэффициент поглощения K в см^{-1} , имеем

$$\text{для кюветы длиной 1 мм} \quad F_1/F_0 = A \exp(-0,1K),$$

$$\text{для кюветы длиной 2 мм} \quad F_2/F_0 = A \exp(-0,2K),$$

где F_0 — падающий поток, A — постоянный коэффициент, который зависит от кюветы и учитывает в особенности потери при отражении от граней. Следовательно,

$$\frac{F_2}{F_1} = \exp(-0,1K).$$

Для света с левой круговой поляризацией:

$$\begin{aligned}\exp(-0,1K_l) &= \frac{0,320}{0,520} = 0,615, \\ -0,1K_l &= 2,3 \ln 0,615 = 2,3(-0,21112) = -0,4856, \\ K_l &= 4,86 \text{ см}^{-1}.\end{aligned}$$

Для света с правой круговой поляризацией:

$$\begin{aligned}\exp(-0,1K_r) &= \frac{0,301}{0,503} = 0,599, \\ -0,1K_r &= 2,3 \ln 0,599 = 2,3(-0,22257) = -0,5119, \\ K_r &= 5,12 \text{ см}^{-1}.\end{aligned}$$

Именно для того, чтобы исключить влияние кюветы, учитываемое коэффициентом A , требуется сделать два измерения с разной толщиной кюветы.

III

Интенсивность монохроматического светового колебания пропорциональна квадрату амплитуды, а коэффициент поглощения для последней равен $K/2$. Отсюда получаем значения коэффициентов уменьшения амплитуды при прохождении через слой толщиной 0,5 см:

для колебания с левой круговой поляризацией:

$$\exp(-4,86 \cdot 0,5 \cdot 0,5) = \exp(-1,200) = 0,3012.$$

для колебания с правой круговой поляризацией:

$$\exp(-5,12 \cdot 0,5 \cdot 0,5) = \exp(-1,280) = 0,2791.$$

Результирующим колебанием для двух колебаний с поляризацией по кругу с одинаковой амплитудой и противоположным направлением вращения будет линейно-поляризованное колебание. Для двух колебаний с противоположным направлением вращения и с неодинаковой амплитудой результирующим будет эллиптически поляризованное колебание. Чтобы убедиться в этом, надо описать колебания с поляризацией по кругу после прохождения через среду по отношению к двум взаимно перпендикулярным осям общего вида Oy и Oz . Колебание с левой круговой поляризацией, например, определяется выражениями

$$y_l = G \cos \omega t, \quad z_l = G \sin \omega t,$$

и колебание с правой круговой поляризацией

$$y_r = D \cos(\omega t - \varphi), \quad z_r = D \sin(\omega t - \varphi),$$

где $\varphi = 2\alpha$, α — угол вращения. По отношению к осям OY и OZ , с которыми оси Oy и Oz образуют угол α , уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} Y_l &= G \cos(\omega t - \alpha), & Z_l &= G \sin(\omega t - \alpha), \\ Y_r &= D \cos(\omega t - \alpha), & Z_r &= -D \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned}$$

Результирующие компоненты колебаний, поляризованных по кругу, описываются выражениями

$$\begin{aligned} Y &= Y_l + Y_r = (G + D) \cos(\omega t - \alpha), \\ Z &= Z_l + Z_r = (G - D) \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned}$$

Это уравнения эллипса по отношению к его осям. Оси соответственно равны $2(G + D)$ и $2(G - D)$. Колебания будут иметь левую поляризацию, если $G - D > 0$, и правую, если $G - D < 0$. Эллипс описывается в направлении вращения того колебания с круговой поляризацией, которое меньше поглощается.

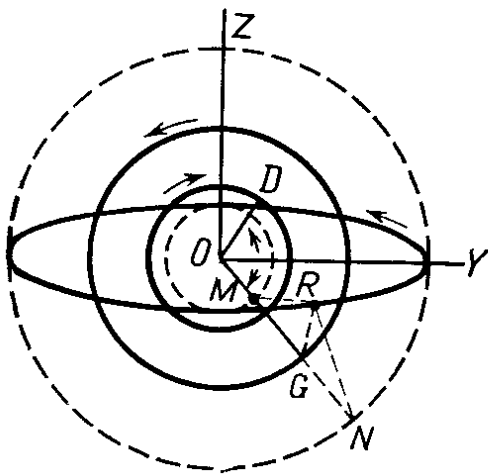
Отношение осей эллипса равно

$$\frac{G - D}{G + D} = \frac{0,3012 - 0,2791}{0,3012 + 0,2791} = 0,0381.$$

Можно получить тот же результат при помощи геометрического рассмотрения. Два колебания с круговой поляризацией могут быть представлены в каждый момент времени векторами

$OD = D$ и $OG = G$, которые вращаются вокруг точки O , образуя равные углы с OY (фиг. 33.3). Построим результирующий вектор OR для OG и OD , затем проведем через R параллели относительно OY и OZ , которые пересекут OG в точках M и N . Находим, что $GN = GR = OD$. Точка N описывает окружность радиусом $D + G$, а точка M — окружность радиусом $D - G$. Геометрическое место точек R получается, если рассмотреть эти две концентрические окружности, вращающийся радиус ON и параллели относительно OY и OZ , проведенные через те точки, в которых он пересекает эти две окружности. Это одно определение эллипса.

Заметим, что эллиптически поляризованное колебание получается в этом случае при помощи совсем другого механизма, чем линейное двойное лучепреломление. В последнем случае эллиптичность колебания изменяется с углом наклона плоскости падающего колебания по отношению к оптическим осям двоякопреломляющей системы. В данном случае вид эллипса не зависит от угла наклона плоскости начального колебания, так как



Фиг. 33.3

в жидкости, к которой не приложено электрическое поле, нет оптических осей. Вращательная способность жидкости обуславливает поворот эллиптически поляризованного колебания на угол α , не зависящий от ориентации эллипса.

IV

Четвертьволновая пластинка расположена так, что ее оптические оси параллельны осям эллиптически поляризованного колебания, выходящего из кюветы, поскольку анализатор, установленный на минимальное пропускание, расположен вдоль большей оси эллипса и поскольку эта ось параллельна одной из оптических осей полуволновой пластинки. Четвертьволновая пластинка преобразует эллиптически поляризованный свет в линейно-поляризованный, который образует угол β с ее оптическими осями, так что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{G - D}{G + D} \approx \beta = 0,0330 \approx 2^\circ.$$

Угол β отсчитывается для наблюдателя по часовой стрелке, если опережающая оптическая ось четвертьволновой пластинки совпадает с большей осью эллипса.

V

Абсолютная ошибка ε в ориентации плоскости колебания равна

$$\varepsilon = C \sqrt{F} \quad (C = \text{const}).$$

Относительная ошибка равна ε/α . Однако $\alpha = Al$ ($A = \text{const}$) и $F = F_0 \exp(-Kl)$. Отсюда

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{C \sqrt{F_0}}{A} \cdot \frac{\exp(-Kl/2)}{l}.$$

Это выражение как функция l минимально для

$$\frac{Kl}{2} = 1, \quad \text{откуда} \quad l = \frac{2}{K} \approx \frac{2}{5} = 0,4 \text{ см.}$$

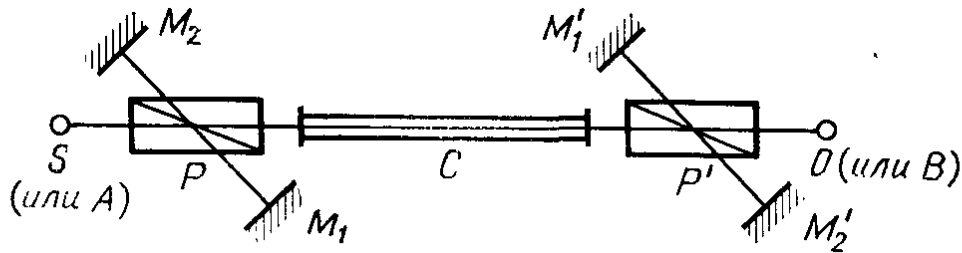
ЗАДАЧА 34

Эффект Фарадея

I

Между двумя поляризаторами P и P' (фиг. 34.1), установленными так, что направление пропускания P' образует угол $+45^\circ$ с направлением пропускания P для наблюдателя, находящегося в точке O , помещена трубка C с сероуглеродом длиной

0,5 м в однородном магнитном поле B , направленном параллельно оси трубки. Какими должны быть направление и минимальное значение B , для того чтобы максимальный поток, выходящий из точки S , достигал точки O ? Что произойдет, если по-



Фиг. 34.1

менять местами положения точек S и O без прочих изменений в установке?

Постоянная Верде для CS_2 равна $42 \cdot 10^3$ мин/Т·м.

II

Точки S и O заменяются теперь двумя идентичными телами A и B соответственно; при этом описанная выше экспериментальная установка позволяет работать в адиабатическом режиме. Поляризаторами P и P' являются двоякопреломляющие призмы, которые исключают второй пучок за счет полного внутреннего отражения (призма Николя, призма Глезебрука и т. д.). Этот пучок отражается по нормали от идеальных зеркал M_1 , M_2 , M_1' и M_2' . Исследуя поляризационные состояния всех пучков, покажите, что обмен энергией излучения между A и B не изменит однажды установленного температурного равновесия.

РЕШЕНИЕ

I

Угол поворота плоскости поляризации при эффекте Фарадея должен составлять $+45^\circ$ для наблюдателя. Направление вращения плоскости поляризации будет тем же, что и направление тока, создающего поле B . Чтобы вращение происходило в правую сторону для наблюдателя, расположенного в точке O , аксиальный вектор B должен быть в общепринятом смысле направлен от точки O к точке S .

Угол поворота плоскости поляризации, согласно выражению Верде, равен

$$\rho = \rho_0 B l.$$

Отсюда в единицах СИ

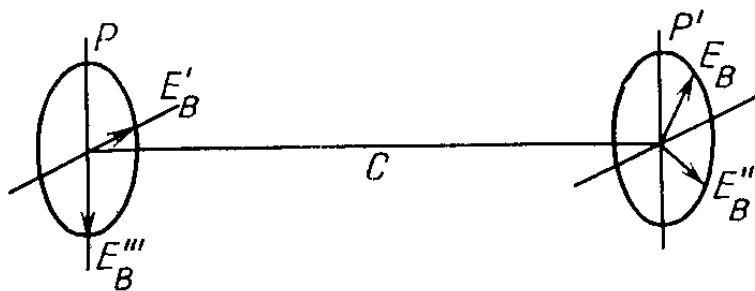
$$B = \frac{\rho}{\rho_0 l} = \frac{45 \cdot 60}{42 \cdot 10^3 \cdot 0,5} = 0,1286 \text{ Т.}$$

При эффекте Фарадея всегда сохраняется неизменным направление вращения генератора тока, создающего поле B . Направление вращения плоскости поляризации для наблюдателя при эффекте Фарадея меняется, если поменять местами положения источника и наблюдателя. Тогда линейно-поляризованный свет, образуемый поляризатором P' , окажется перпендикулярным направлению пропускания поляризатора P , и свет не будет проходить.

Эта установка образует оптический вентиль; свет свободно проходит в направлении SO , но задерживается в направлении OS .

II

Если учесть лишь результаты I, а также то, что тело B получает половину потока Φ , который тело A передает поляризатору P (другая половина исключается при полном отражении), тогда как A не получает половину потока Φ , испущенного телом B и проходящего через P' (другая половина полностью отражается), то вопреки второму закону термодинамики тепловое равновесие нарушается. Это парадокс Вейна. Для полноты картины следует учесть наличие зеркал, тогда тело A «чувствует» поток $\Phi/2$, который оно излучает и который отражается от M_1 . Подобно этому, тело B «чувствует» поток $\Phi/2$, который оно передает зеркалу M'_1 , после полного отражения в P' . Другая половина потока, которая содержит световое колебание E_B , про-



Фиг. 34.2

ходящее через поляризатор P' и трубку C (фиг. 34.2) (световое колебание на выходе из C будет E'_B), полностью отражается в P , затем в M_2 , затем опять в P и возвращается в B . Но на выходе из трубки ориентация колебания E'_B перпендикулярна E_B . Тогда пучок E'_B отражается в P' , затем в M'_2 , затем в P' и возвращается в поляризатор P , который пропускает его, так как колебание теперь имеет ориентацию E''_B . Тогда тело A наконец получает поток $\Phi/2$, выходящий из тела B и пропускаемый через P' .

ЗАДАЧА 35

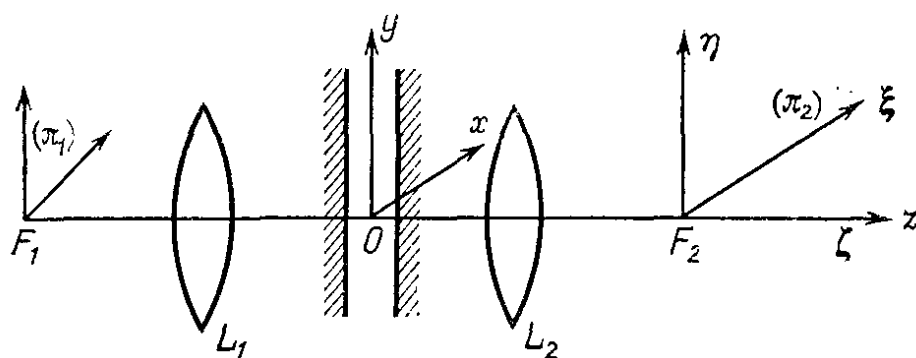
Дифракция на большом расстоянии

I

Рассмотрим установку, представленную на фиг. 35.1. Она состоит из центрально-симметричной системы двух линз L_1 и L_2 с одинаковыми фокусными расстояниями f . Изображение светящегося объекта, помещенного в фокальной плоскости π_1 линзы L_1 , образуется в фокальной плоскости π_2 линзы L_2 .

Источник излучает монохроматическое излучение с длиной волны λ .

Между линзами L_1 и L_2 помещается прямоугольная щель шириной a и высотой b ($b \gg a$). Центр щели совпадает с оптиче-



Фиг. 35.1

ской осью системы. Координаты точки в плоскости зрачка обозначаются через x и y .

1. Рассмотрите последовательно случаи с различными типами объекта:

- а) безразмерная точка, помещенная в фокусе линзы L_1 ;
- б) малый бесконечно тонкий отрезок линии, проходящий через F_1 и параллельный краям дифракционной щели.

В обоих случаях кратко опишите изображение. Найдите распределение освещенности в плоскости π_2 , каждая точка которой описывается координатами ξ и η . Дайте графический вид этого распределения вдоль оси $F_2\xi$. (Используйте освещенность как ординату и вдоль абсциссы отложите $u = (\sin i)/\lambda$, где i — угол, который дифрагирующий луч образует с нормалью к плоскости зрачка.)

2. Теперь объект представляет собой набор из пяти светящихся линий, параллельных друг другу и дифракционной щели. Эти линии отстоят друг от друга на одинаковых расстояниях (период d), размер объекта считается очень большим.

Каково минимальное значение d , для которого изображение имеет периодическую структуру:

а) если излучение объекта совершенно некогерентно? Вспомните, что

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8};$$

б) если освещение когерентно?

Численный пример: $a = 5$ мм; $f = 1$ м; $\lambda = 0,5$ мкм.

Вопрос 2, б трудно решить, если не использовать преобразование Фурье.

II

Точечный источник вновь помещается в точке F_1 , а в плоскости xOy последовательно помещаются различные решетки с периодом p .

1. Решетка состоит из бесконечно тонких прямых штрихов, параллельных Oy и разделенных непрозрачными интервалами шириной p .

а) Найдите распределение освещенности в плоскости π_2 .

б) Представьте графически распределение света в зависимости от $u = (\sin i)/\lambda$. Рассмотрите случаи, когда дифракционная решетка имеет бесконечную ширину и затем конечную ширину L .

2. Штрихи решетки параллельны Oy , но теперь прозрачные и непрозрачные интервалы имеют одинаковую ширину $p/2$. Ответьте на прежние вопросы.

3. Рассмотрите синусоидальную решетку. Амплитуда света, проходящего в точке $P(x, y)$ зрачка, имеет вид

$$f(x) = \cos \frac{2\pi x}{p}.$$

Пропускание постоянно вдоль линий, параллельных Oy . Как и в прежних вопросах, определите распределение освещенности и изобразите его графически.

Численный пример: $p = 2$ мкм; $\lambda = 0,5$ мкм; $L = \infty$, затем $L = 10$ см.

РЕШЕНИЕ

I. Дифракция от щели

Так как щель длинная и узкая, то она дает дифракционную картину только в плоскостях, параллельных xOz . Решая эту задачу, сведем ее к одномерной задаче, когда остаются только переменные x и ξ .

1. а) *Точечный источник*. Если зрачок очень велик, то дифракции не происходит и в F_2 (точка, сопряженная F_1) образуется одно изображение, идентичное объекту.

Введение зрачка приводит к растягиванию изображения, центр которого, однако, остается на геометрическом изображении F_2 . Так как зрачок есть щель, параллельная Oy , то изображение растягивается вдоль линии $F_2\xi$ (приложение А, III, 1).

Расчет устанавливает этот результат.

Во всех задачах мы будем нормировать результаты, т. е. положим максимум интенсивности равным единице. Таким образом,

$$I(u) = \left(\frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \right)^2, \quad \text{где } u = \frac{\sin \theta}{\lambda}. \quad (1)$$

Изображение образовано из ряда малых освещенных участков, расположенных вдоль $F_2\xi$ (фиг. 35.2, а).

Изменение освещенности показано на фиг. 35.2, б.

Центральная яркая область в два раза шире ($2/a$), чем другие боковые полосы.

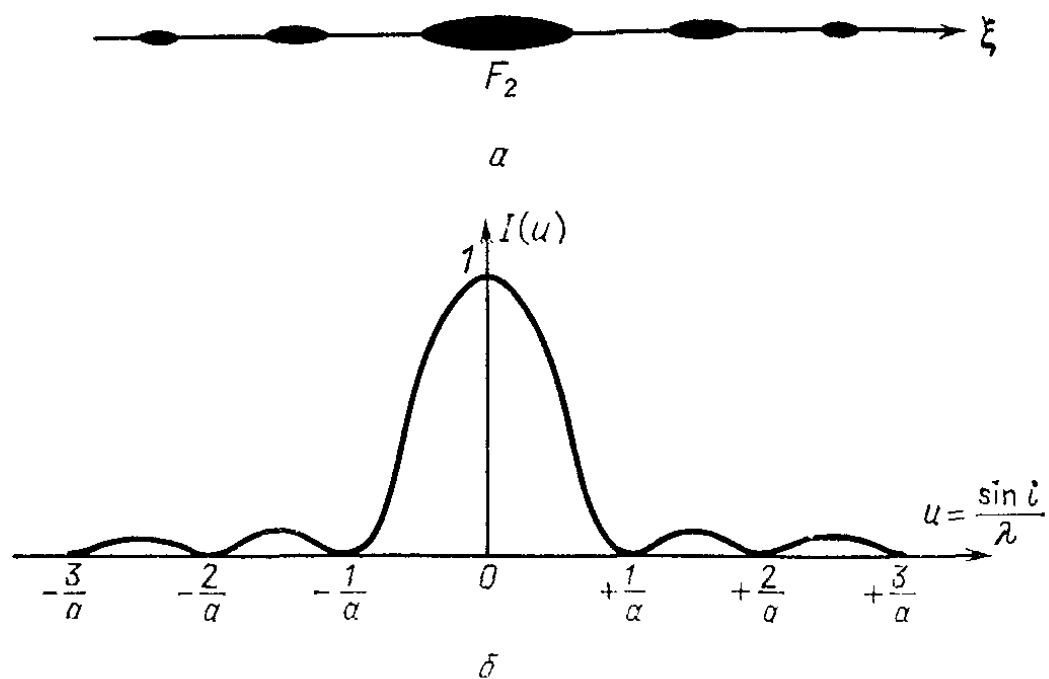
б) *Объектом является очень тонкая яркая линия*. В этой задаче не определены степени пространственной когерентности светового источника. Однако результат будет одним и тем же во всех случаях. Линию можно себе представить состоящей из ряда светящихся точек $m_0, m_1, \dots, m_n$ (фиг. 35.3). Каждая из этих точек образует линию дифракции с центром на геометрическом изображении точки и параллельную $O\xi$ (фиг. 35.4).

Так как геометрическое место точек дифракционной картины лежит в плоскостях, параллельных $\xi F_2 \zeta$, то вдоль $F_2\eta$ не может быть никакой интерференции. Если источник состоит из коротких светящихся отрезков линии, то образованные полосы параллельны Oy (фиг. 35.5). Высота этих полос равна высоте линейчатого источника, так как в этом случае увеличение равно единице.

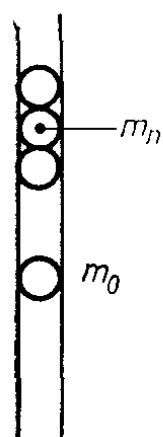
Распределение освещенности вдоль любой линии, параллельной $O\xi$, то же самое, что и рассчитанное выше.

2. *Объектом является решетка с периодом d* .

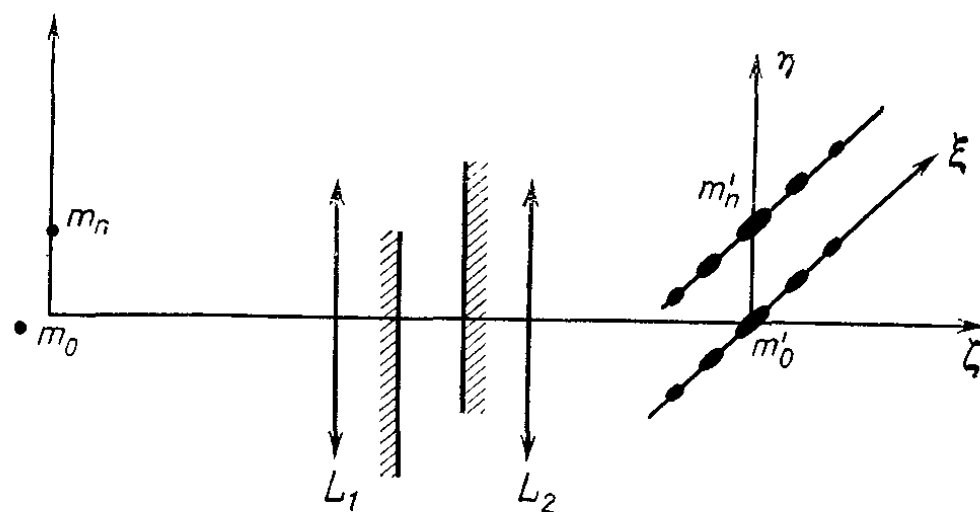
а) *Некогерентное освещение*. Каждая щель образует систему полос, идентичную предыдущей, с центром на ее геометрическом изображении. Так как линейчатые источники некогерентны, то



Фиг. 35.2



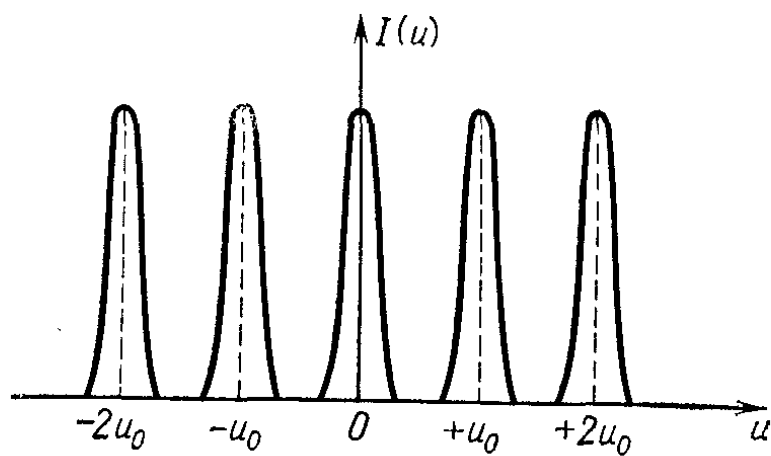
Фиг. 35.3



Фиг. 35.4



Фиг. 35.5



Фиг. 35.6

мы должны рассматривать интенсивность, создаваемую каждым из них, и затем взять сумму этих интенсивностей.

Для простоты будем считать, что дифракционная картина, образованная каждой щелью, ограничивается центральной полосой, которая имеет центр на геометрическом изображении щели.

Распределение освещенности показано на фиг. 35.6, где u_0 равно отношению $d/f\lambda$.

Нетрудно видеть, что если d уменьшается, то в конце концов создается положение, когда решетка перестает разрешать.

Если в качестве критерия разрешения принять случай, когда дифракционный максимум от источника-щели совпадает с первым минимумом дифракционного изображения от соседней щели, то получим (фиг. 35.7)

$$u_0 = \frac{1}{a} = \frac{\sin i}{\lambda} \approx \frac{i}{\lambda} = \frac{d}{\lambda}. \quad (2)$$

Следовательно,

$$d_{\min} = \lambda \frac{f}{a}. \quad (2a)$$

В действительности, если принять во внимание вторичные максимумы, найдем

$$\begin{aligned} I_{\max} &= I(0), \\ I_{\min} &= 2 \left\{ I\left(\frac{1}{2a}\right) + I\left(\frac{2}{3a}\right) + I\left(\frac{5}{2a}\right) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (1) дает

$$\begin{aligned} I_{\max} &= 1, \\ I_{\min} &= 2 \left[\frac{1}{\pi^2/4} + \frac{1}{9\pi^2/4} + \frac{1}{25\pi^2/4} + \dots \right], \\ I_{\min} &= \frac{8}{\pi^2} \left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right] = \frac{8}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = 1 = I_{\max}. \end{aligned} \quad (4)$$

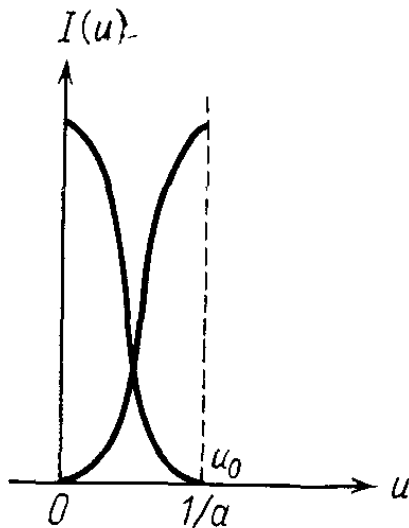
Для $u = u_0$ изображение не контрастно.

Периодическая структура появляется только для

$$\begin{aligned} u &> u_0, \\ d &> \frac{\lambda f}{a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Численный пример:

$$\begin{aligned} d \text{ (мкм)} &= 0,5 \cdot \frac{10^3}{5}, \\ d &> 0,1 \text{ мм.} \end{aligned}$$



Фиг. 35.7

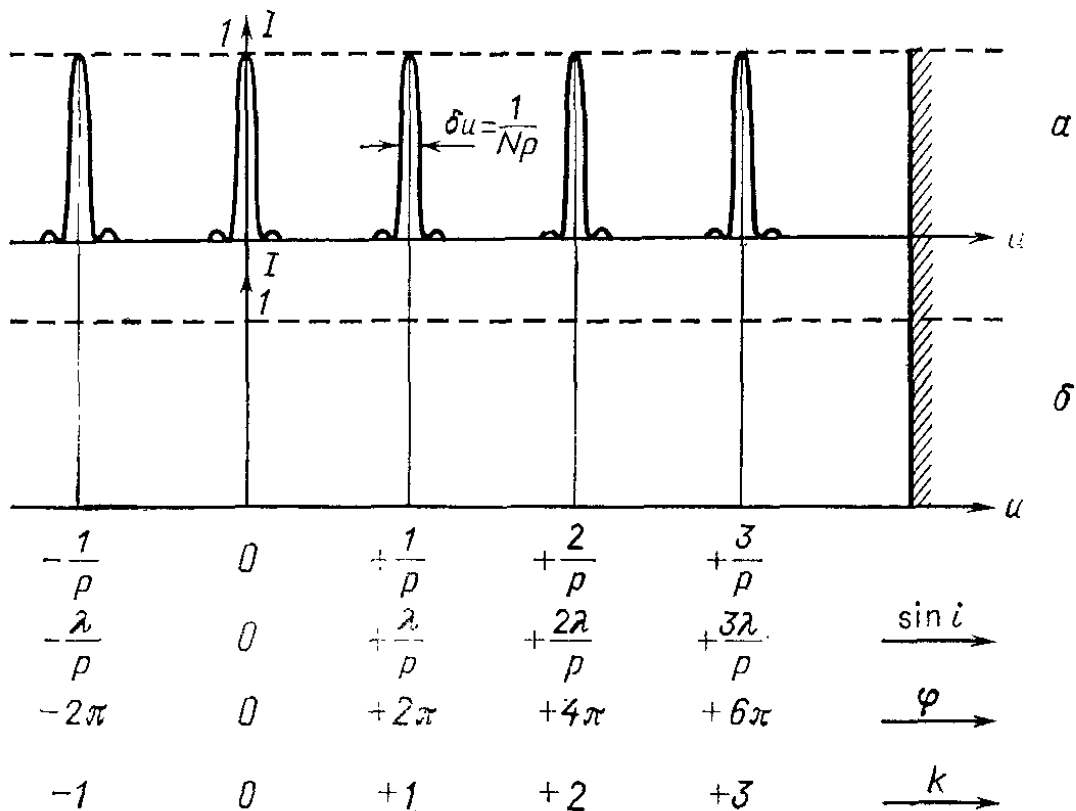
б) *Когерентное освещение.* Теперь необходимо просуммировать амплитуды, а не интенсивности. Вдоль $F_2\eta$ нет интерференции, она наблюдается только вдоль $F_2\xi$.

II. Дифракция на решетке

1. Решетка с тонкими щелями

а) *Решетка шириной L .* Каждая бесконечно тонкая щель дифрагирует лучи равномерно в пространстве.

Как и прежде, поскольку щели параллельны Oy , дифракция наблюдается только в плоскостях, параллельных xOz .



Фиг. 35.8

Кроме того, в случае точечного источника дифракционное изображение имеет центр на геометрическом изображении F_2 и растянуто вдоль $F_2\xi$.

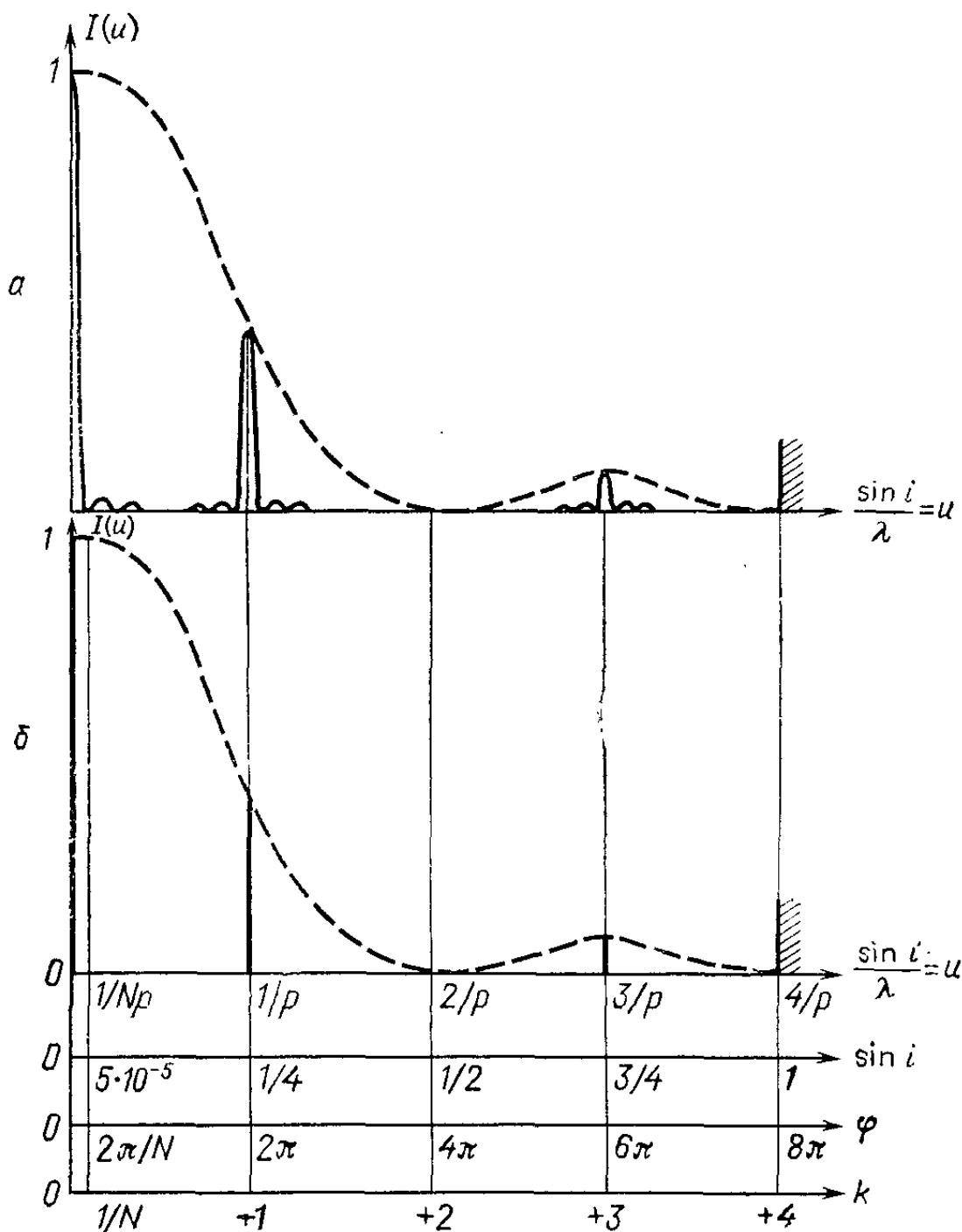
В случае N дифракционных щелей распределение интенсивности имеет вид

$$I(u) = A(u) A^*(u) = \left(\frac{\sin N\pi u p}{\sin \pi u p} \right)^2. \quad (6)$$

Из (6) можно установить положение спектров, которые эквидистантны с периодом $\Delta u = 1/p$.

Их ширина равна $\delta u = 1/Np$. Число спектров ограничено условием $\sin i < 1$, которое в данном случае проявляется как $|k| < 4$. Таким образом, имеются семь видимых спектров с одинаковой интенсивностью.

На фиг. 35.8, а показано изменение интенсивности в плоскости изображения. Переменные $u = (\sin i)/\lambda$, $\sin i$, φ и порядок интерференции k приводятся под каждым максимумом на рисунке.



Фиг. 35.9

Примечание. Используя в данном случае термин «спектр», мы не имеем в виду наличие цветного спектра, так как применяется монохроматический свет; этот термин относится к максимумам интенсивности в дифракционной картине.

б) **Бесконечная решетка.** Ширина спектра $\delta u = 1/Np$ уменьшается по мере увеличения N . Для бесконечного числа N изображение состоит из ряда ярких точек на оси $F_2\xi$ (фиг. 35.8, б).

2. Решетка Фуко (период p , ширина щелей $p/2$).

а) *Зрачок из N щелей.* Дифракционная амплитуда от одной щели под углом u определяется как

$$A_0(u) = \frac{p}{2} \frac{\sin \pi u (p/2)}{\pi u (p/2)}. \quad (7)$$

Интенсивность дифракции на решетке под углом u равна

$$I(u) = \left[\underbrace{\frac{p}{2} \frac{\sin (\pi u p/2)}{\pi u p/2}}_{\text{дифракционный член}} \right]^2 \left(\underbrace{\frac{\sin N \pi u p}{\sin \pi u p}}_{\text{интерференционный член}} \right). \quad (8)$$

Результаты показаны на фиг. 35.9, а. Спектры четного порядка исчезают, и остаются только спектры порядков $0, \pm 1, \pm 3$. Распределение интенсивности на дифракционной картине всегда имеет место вдоль $F_2\xi$, так как мы имеем дело с точечным источником и одномерным зрачком.

б) *Бесконечная решетка.* Ход рассуждения такой же, как и в предыдущем случае. Вдоль оси находятся пять точек неравной интенсивности (фиг. 35.9, б).

Итак, характеристики решетки приведут к следующим особенностям в изображении.

Ширина щелей определяет величину модуляции. Если щели обладают конечной шириной (как обычно бывает на практике), то спектры не имеют одинаковой интенсивности. Определенные порядки могут даже исчезнуть.

Период решетки определяет положение спектров. Они эквидистантны в пространстве u с периодом $\Delta u = 1/p$.

Ширина решетки характеризует ширину спектров ($\delta u = 1/Np = 1/L$).

3. Синусоидальная решетка.

а) *Решетка шириной L .* Амплитуда света, дифрагированного под углом u , определяется выражением

$$A(u) = \int_{-L/2}^{+L/2} f(x) e^{j2\pi u x} dx = \int_{-L/2}^{+L/2} \cos 2\pi \frac{x}{p} e^{j2\pi u x} dx. \quad (9)$$

Примем

$$u_1 = \frac{1}{p}. \quad (10)$$

Предыдущий интеграл записывается в виде

$$A(u) = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{j2\pi (u+u_1) x} dx + \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{j2\pi (u-u_1) x} dx; \quad (11)$$

таким образом,

$$A(u) = \frac{1}{2} L \left[\frac{\sin \pi (u + u_1) L}{\pi (u + u_1) L} + \frac{\sin \pi (u - u_1) L}{\pi (u - u_1) L} \right]. \quad (12)$$

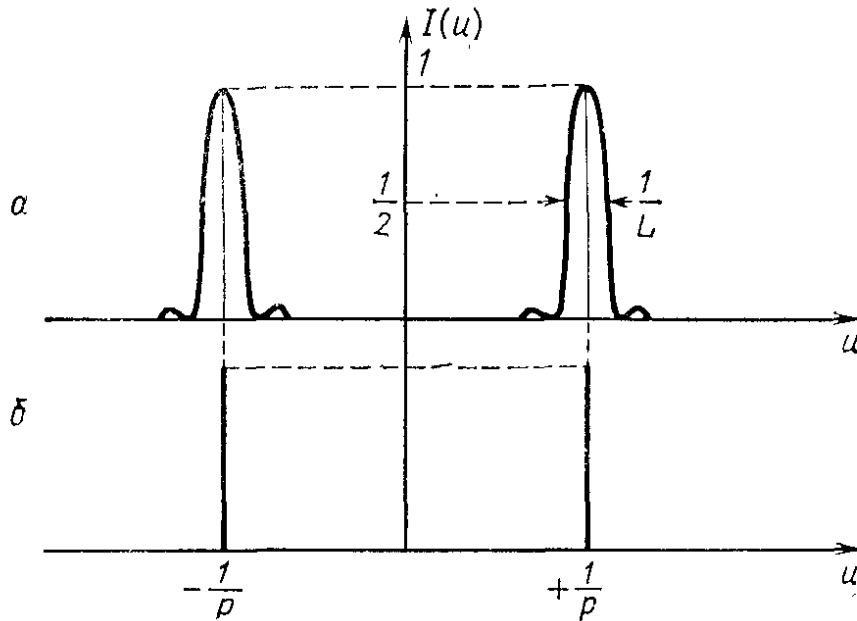
Так как L много больше чем p , то

$$\frac{1}{L} \ll \frac{1}{p}$$

или

$$\frac{1}{L} \gg u_1.$$

Два спектра, показанные на фиг. 35.10, *а*, практически не имеют ни одной общей точки.



Фиг. 35.10

Таким образом, можно написать для нормированной интенсивности света

$$I(u) = \left[\frac{\sin \pi (u + u_1) L}{\pi (u + u_1) L} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi (u - u_1) L}{\pi (u - u_1) L} \right]^2. \quad (13)$$

Изменение интенсивности изображается двумя кривыми, аналогичными представленным на фиг. 35.2, *б*, но смещенными на $2u_1$.

Изображение на оси ξ состоит из двух спектров, разделенных промежутком $\Delta u = 2u_1 = 2/p$ и имеющих ширину $\delta u = 1/L$.

Обнаруживаются только спектры порядков $+1$ и -1 (фиг. 35.10, *а*).

б) Бесконечная решетка. Изображение сводится к двум ярким точкам, расположенным на оси ξ симметрично по отношению к F_2 , на расстоянии $\Delta u = 2/p$ (фиг. 35.10, *б*) друг от друга.

Все эти задачи можно решить более просто, используя преобразование Фурье.

1. Зрачок-щель

1. а) *Когерентное освещение.* Так как источником является безразмерная точка, помещенная в фокусе линзы L_1 , то щель освещается плоской волной, фронт которой параллелен плоскости зрачка.

Дифракционная амплитуда есть преобразование Фурье для амплитудного распределения света на зрачке (см. приложение А, III, 1), а именно

$$A(u) = F(u) = \frac{\sin \pi u a}{\pi u a}.$$

б) *Объектом является очень тонкая яркая линия.* Распределение $A(u)$ сохраняет прежнее значение.

2. *Объектом является решетка.* а) *Некогерентное освещение объекта.* *Обозначения.* Обозначим через M точку на плоскости объекта и через M' точку на плоскости изображения. Кроме того, будем рассматривать этот вопрос в предположении, что плоскость объекта и плоскость изображения совпадают (при расчете разделение этих плоскостей в явном виде не проявляется). Следовательно, вектор $M - M'$ будет представлен вектором, соединяющим точку M' в геометрическом изображении с точкой M . (Точка M обозначает вектор $F_1 M$ или $F_2 M$, а P — вектор OP .)

Каждая точка M объекта образует дифракционную картину с центром на геометрическом изображении точки M (которое мы теперь также обозначим M).

Так как дифракционные изображения не имеют определенных фазовых соотношений, то в плоскости изображения интенсивности складываются.

Если функция $O(M)$ представляет собой распределение интенсивности в плоскости объекта, то интенсивность изображения в точке M' определяется выражением

$$I(M') = \int_{\text{объект}} O(M) D(M' - M) dM, \quad (14)$$

где $D(M' - M) = |A(M' - M)|^2$ есть распределение интенсивности в дифракционном пятне, полученное с этим зрачком. Если

$$\begin{aligned} I(M) &\xrightarrow{\text{Ф. Т.}} i(P), \\ O(M) &\xrightarrow{\text{Ф. Т.}} o(P), \\ D(M) &\xrightarrow{\text{Ф. Т.}} d(P), \end{aligned} \quad (15)$$

то теорема Парсеваля позволяет осуществить преобразование свертки (14) в произведение

$$i(P) = o(P) \cdot d(P). \quad (16)$$

Мы вернемся в тексте к специальному случаю, когда зрачок представляет собой тонкую щель, параллельную Oy , и дает дифракционную картину только вдоль плоскостей, параллельных $\xi F_2 \xi$. Единственными переменными, с которыми нам придется иметь дело, являются x , u и u' .

Таким образом,

$$I(u') = \int o(u) D(u' - u) du \quad (17)$$

и

$$i(x) = o(x) \cdot d(x). \quad (18)$$

Теперь последовательно определим функции $o(x)$, $d(x)$ и затем $i(x)$.

α) *Вычисление функции $o(x)$* . Распределение интенсивности в плоскости объекта имеет вид

$$O(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - nu_0). \quad (19)$$

Это «ряд Дирака» с периодом u_0 .

Преобразование Фурье для «ряда Дирака» с периодом u_0 есть «ряд Дирака» с периодом $1/u_0$. Имеем

$$o(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{n}{u_0}\right). \quad (20)$$

β) *Вычисление $d(x)$* . Мы считаем, что

$$D(u) = A(u) A^*(u). \quad (21)$$

Однако здесь $A(u)$ — реальная функция и

$$D(u) = [A(u)]^2. \quad (22)$$

Теорема взаимности Парсеваля позволяет написать

$$d(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) f(x - X) dX, \quad (23)$$

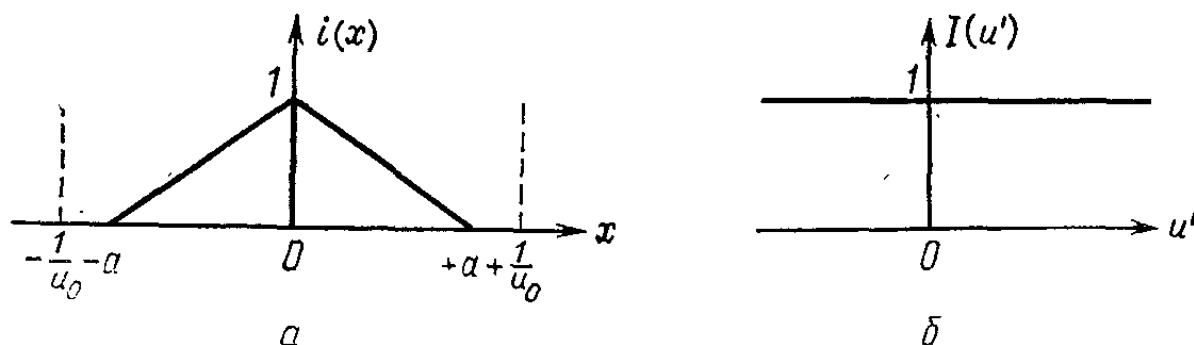
где $d(x)$ — автокорреляционная функция пропускательной способности зрачка (для амплитуды).

Так как $f(X)$ — «прямоугольная» функция, то свертка равна общей площади двух прямоугольников, смещенных на X (см. приложение А, В, III).

Возможно несколько случаев в зависимости значения u_0 .

$$\boxed{\frac{1}{u_0} > a} \quad (\text{фиг. 35.11, а}).$$

Имеем $i(x) = o(x)d(x) = \delta(x)$. Только основная частота проходит через щель.



Фиг. 35.11

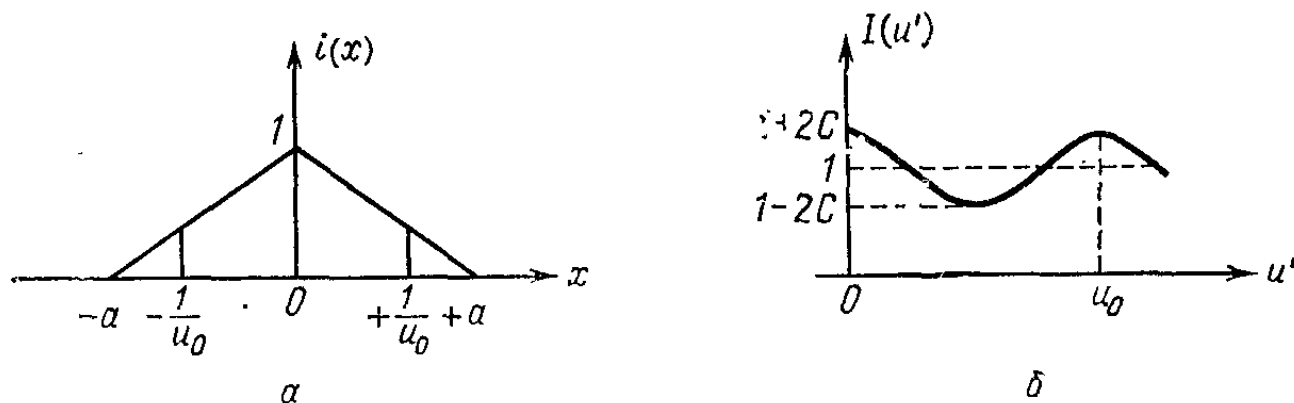
Находим

$$I(u') = \text{F. T.} [\delta(x)], \text{ так что } I(u') = 1 \quad (\text{фиг. 35.11, б}). \quad (24)$$

Плоскость изображения равномерно освещена.

$$\boxed{\frac{1}{u_0} < a} \quad (\text{фиг. 35.12, а}).$$

В дополнение к основной частоте проходит и определенное количество других пространственных частот. Они всегда ослаб-



Фиг. 35.12

лены функцией $d(x)$. Чтобы убедиться в справедливости этих представлений, рассмотрим пример, представленный на фиг. 35.12. Находим

$$i(x) = \delta(x) + C \left[\delta\left(x + \frac{1}{u_0}\right) + \delta\left(x - \frac{1}{u_0}\right) \right], \quad (25)$$

где

$$C = 1 - \frac{1}{au_0}.$$

Отсюда получаем

$$I(u') = 1 + C [e^{j2\pi u'/u_0} + e^{-j2\pi u'/u_0}],$$

$$I(u') = 1 + 2C \cos 2\pi \frac{u'}{u_0}. \quad (26)$$

Так как $1/u_0$ меньше чем a , то изображение имеет периодическую структуру (фиг. 35.12, б).

Таким образом, решетка разрешает для значений

$$\frac{1}{u_0} < a, \quad \text{т. е. для } d > \lambda \frac{f}{a}.$$

Примечание. Видно, что для значений u_0 , больших чем $1/a$, изображение не всегда соответствует объекту. Действительно, даже если все пространственные частоты проходят, то их амплитуды модулируются функцией $d(x)$. Только основная частота не подвергается воздействию.

б) *Когерентное освещение объекта.* Здесь необходимо учесть фазовые соотношения, которые существуют между различными амплитудами света, проходящего от точек на объекте до плоскости изображения. Для этого нужно оценить интеграл

$$E(M') = \int \Omega(M) A(M' - M) dM, \quad (27)$$

где $E(M')$ — результирующая амплитуда в точке M' .

Примем

$$\begin{cases} \Omega(M) — \text{распределение амплитуд в плоскости объекта;} \\ A(M) — \text{распределение амплитуд в дифракционном пятне.} \end{cases}$$

Если

$$\begin{aligned} \Omega(M) &\xrightarrow{\text{F. T.}} \omega(P), \\ A(M) &\xrightarrow{\text{F. T.}} f(P), \\ E(M) &\xrightarrow{\text{F. T.}} e(P), \end{aligned} \quad (28)$$

то теорема Парсеваля приводит к

$$e(P) = \omega(P) \cdot f(P). \quad (29)$$

Задача всегда одномерна, и, таким образом, имеем *свертку*

$$E(u') = \int \Omega(u) A(n' - u) du \quad (30)$$

и *произведение*

$$e(x) = \omega(x) \cdot f(x). \quad (31)$$

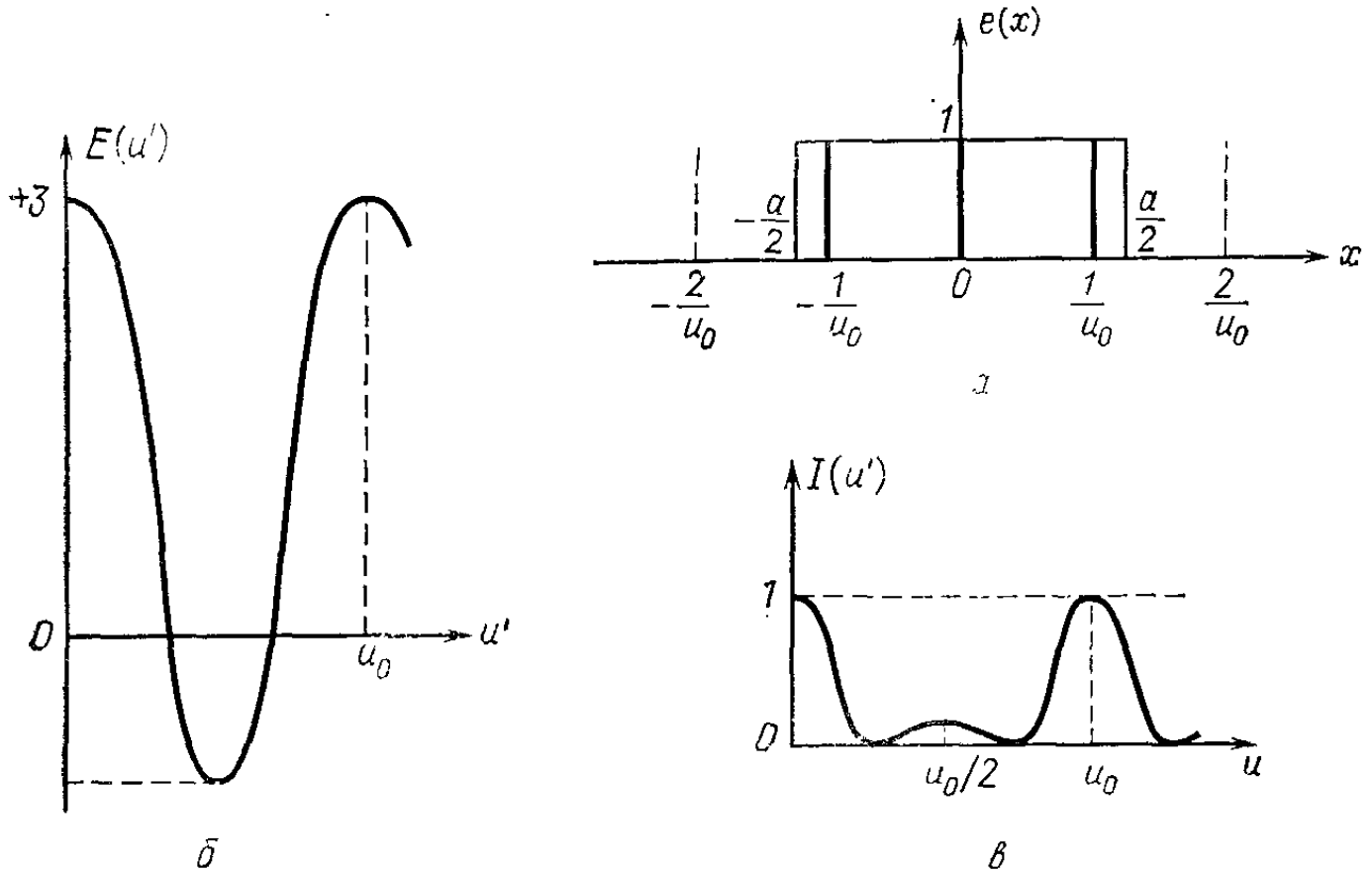
Возьмем произведение функций $\omega(x)$ и $f(x)$ и обозначим его через $e(x)$ (фиг. 35.13, а).

Получаем следующие результаты:

При $1/u_0 > a/2$ проходит только основная частота.

$E(u') = 1$. Амплитуда постоянна в плоскости изображения.

При $1/u_0 < a/2$ проходят основная частота и некоторые гармоники.



Фиг. 35.13

В примере, представленном на фиг. 35.13, а, имеем

$$e(x) = \delta(x) + \delta\left(x - \frac{1}{u_0}\right) + \delta\left(x + \frac{1}{u_0}\right). \quad (32)$$

Следовательно,

$$E(u') = 1 + e^{j2\pi u'/u_0} + e^{-j2\pi u'/u_0} = 1 + 2 \cos 2\pi \frac{u'}{u_0}. \quad (33)$$

Кривые на фиг. 35.13, а и 35.13, б характеризуют значения амплитуды и соответствующей интенсивности.

Изображение имеет тот же период, что и объект, но между главными максимумами появляются вторичные максимумы. В итоге, когда $1/u_0$ меньше чем $a/2$, распределение света в изображении становится периодическим и решетка разрешает это изображение. Чем больше пространственных частот проходит через щель, тем больше сходство между изображением и объектом. В любом случае изображение не будет идентичным объекту, так как ширина зрачка конечна.

Заключение. Сравнивая результаты для когерентного и некогерентного освещения, находим, что в каждом случае объект разрешается при следующих граничных значениях u_0 :

объект — источник некогерентного света, $1/u_0 < a$,
 объект — источник когерентного света, $1/u_0 < a_2$.

Кроме того, находим:

разрешение увеличивается с шириной апертуры,
 разрешение лучше в некогерентном, чем в когерентном свете (отношение равно 2).

Примечание. Микроскоп — оптический прибор, который позволяет в большой степени изменять когерентность освещения. Действительно, оператор, работающий с микроскопом, может регулировать величину апертуры конденсора (закрытый конденсор → когерентное освещение, открытый конденсор → некогерентное освещение). Известно, что можно улучшить разрешение, используя по возможности наиболее некогерентный свет.

II. Решетка

Так как источник — фиксированная точка, то переменную u' больше вводить не надо. Можно иметь дело только с сопряженными переменными x и u .

A. Решетка с конечной шириной (см. приложение A).

Прозрачность (по амплитуде) зрачка характеризуется величиной

$$g(x) = h(x) \cdot f(x), \quad (34)$$

где $h(x)$ — амплитуда света, пропущенного бесконечной решеткой, $f(x)$ — амплитуда света, пропущенного щелью шириной L . Амплитуда света, дифрагированного под углом u , задается такой функцией $G(u)$, что

$$G(u) = H(u) \otimes F(u). \quad (35)$$

1. Бесконечно тонкие щели.

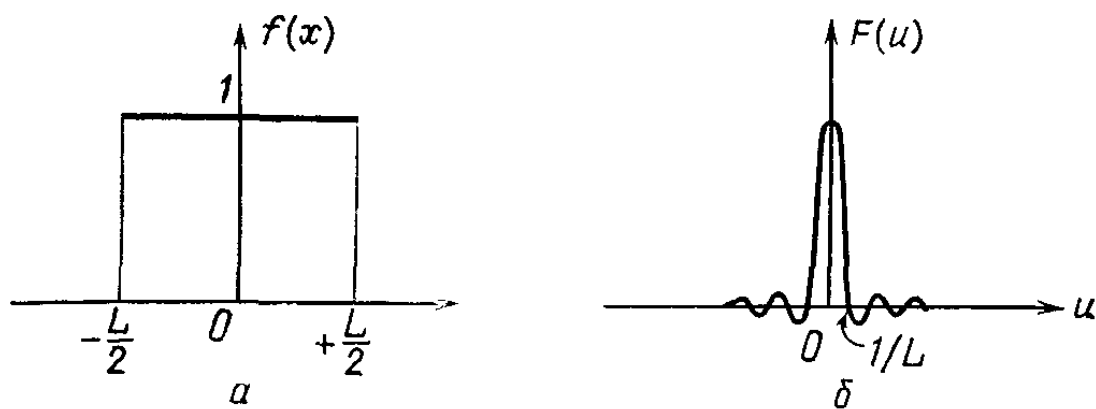
Графически легко определить свертку:

$$F \otimes H$$

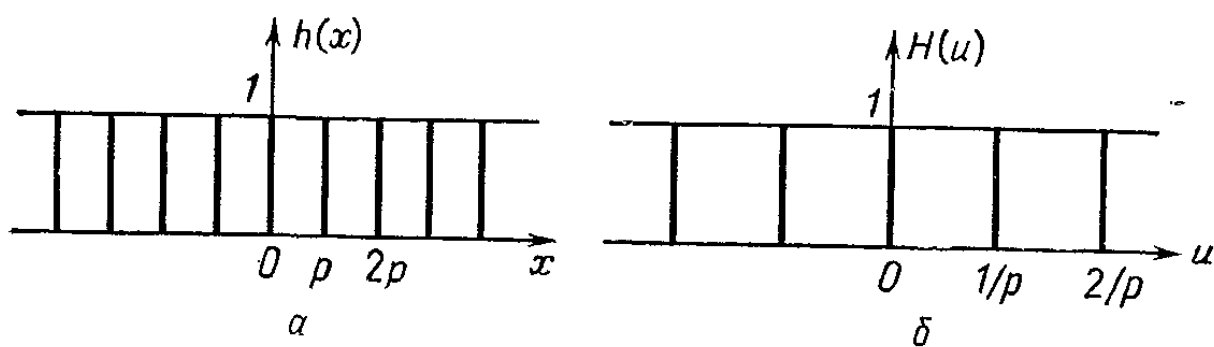
(фиг. 35.14, б, 35.15, б, 35.16).

2. Решетка Фуко (фиг. 35.14, б, 35.17, б и 35.18).

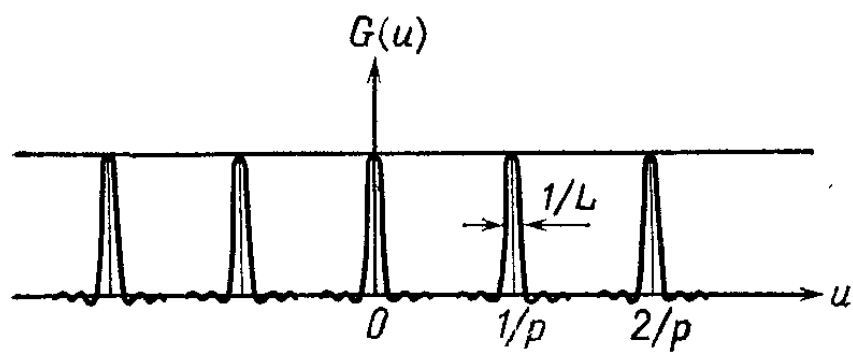
3. Синусоидальная решетка (фиг. 35.14, б, 35.19, б и 35.20).



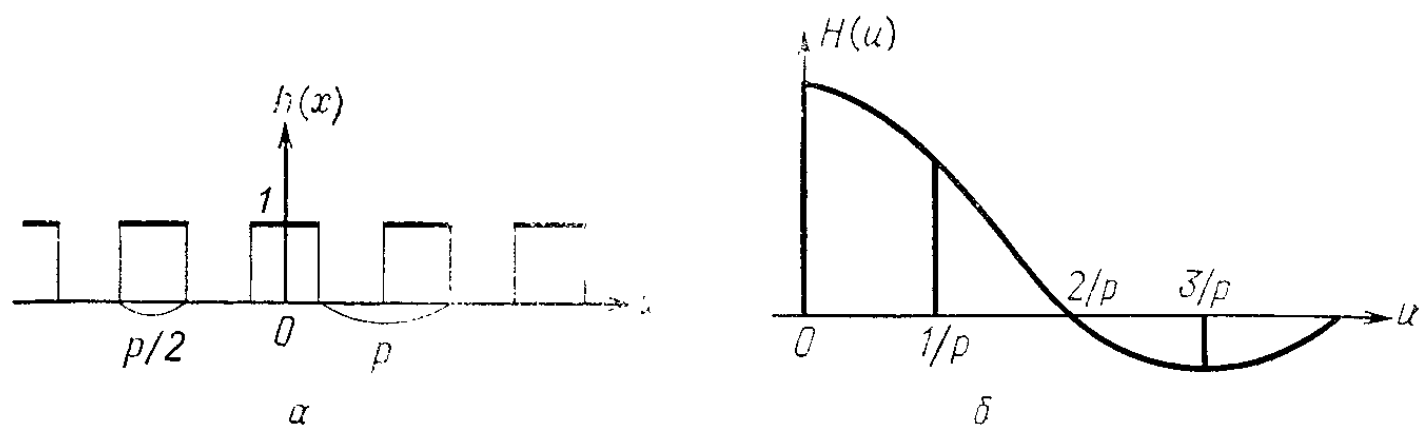
Фиг. 35.14



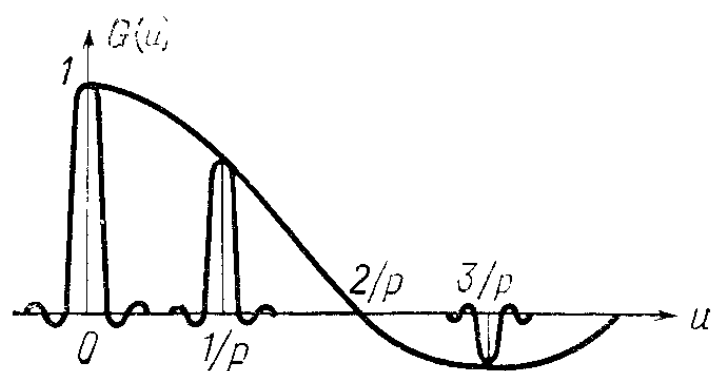
Фиг. 35.15



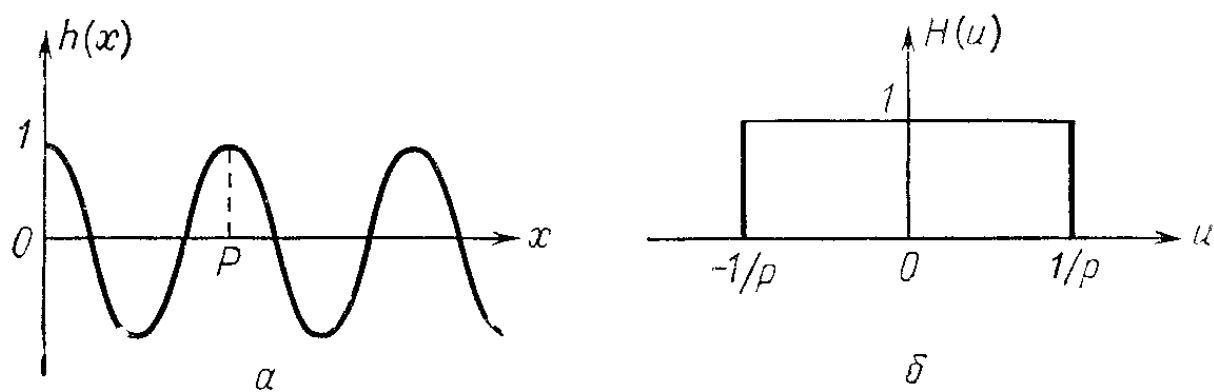
Фиг. 35.16



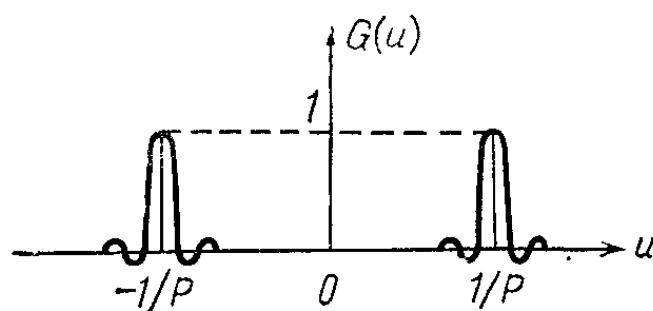
Фиг. 35.17



Фиг. 35.18



Фиг. 35.19



Фиг. 35.20

Б. Бесконечно широкая решетка.

Задача упрощается, так как щелевой диафрагмы шириной L не имеется. Распределение амплитуды в плоскости изображения определяется такой функцией $H(u)$, что

$$H(u) = \text{F. T. } [h(x)]. \quad (36)$$

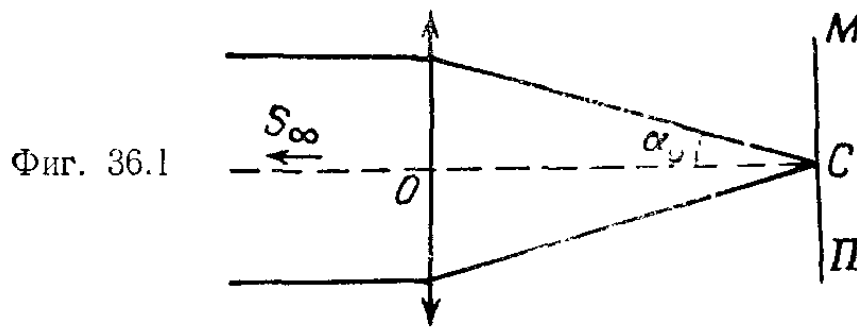
Для трех рассмотренных решеток амплитудное распределение света представлено кривыми на фиг. 35.15, б, 35.17, б и 35.19, б.

ЗАДАЧА 36

Дифракция на круглом зрачке

Рассмотрим объектив O , ограниченный круглым контуром радиусом $r_0 = 3$ см.

Этот объектив, который считается идеальным, освещается точечным источником, расположенным на бесконечности на оси объектива O .



Источник является монохроматическим, он излучает свет с длиной волны $\lambda = 6$ мкм.

Пусть α_0 будет максимальной апертурой объектива (фиг. 36.1). Будем считать α_0 малой величиной.

I. Открытый зрачок

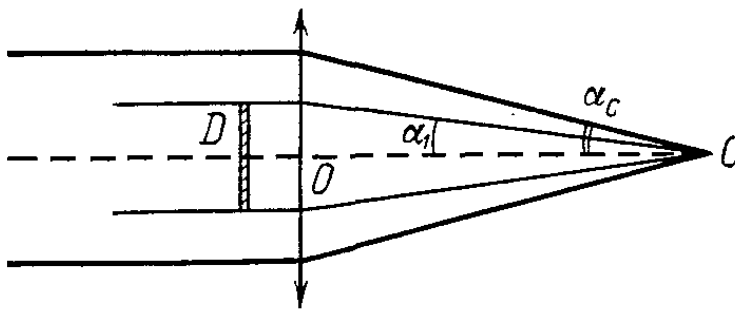
1. Напишите выражение для амплитудного распределения света и для распределения интенсивности в плоскости Π . Охарактеризуйте точку M в плоскости Π ее расстоянием ρ от точки C , геометрического изображения источника. Для упрощения примите $Z = (2\pi/\lambda)\alpha_0\rho$. Какова освещенность в центре C дифракционной картины?

2. Найдите угловой радиус θ первого темного кольца на дифракционной картине (θ — угол, под которым радиус первого темного кольца виден из оптического центра O линзы).

II. Непрозрачный диск

Перед объективом O перпендикулярно падающему свету помещается непрозрачный круглый экран D . Центр экрана находится на оптической оси объектива. Экран D противолежит углу $2\alpha_1$ с вершиной в точке C (фиг. 36.2).

1. Найдите распределение амплитуды и интенсивности в плоскости Π . Какова интенсивность освещенности в центре дифракционной картины? Определите величину радиуса r_1 диска D , при котором уменьшение интенсивности не превышает 10% интенсивности, определенной в вопросе I.



Фиг. 36.2

2. Определите угловой радиус первого темного кольца в случае, когда $\alpha_0 = 2\alpha_1$.

3. Графически сравните природу двух дифракционных пятен:
 а) без экрана D ,
 б) с экраном D .

Оптические системы, содержащие в центре экран, встречаются в некоторых телескопах. Что происходит в этих случаях с разрешением компонент двойных звезд? Считайте, что компоненты звезд имеют одинаковую интенсивность.

III. Кольцеобразный зрачок

Теперь будем считать, что экран D почти полностью закрывает объектив O таким образом, что свет проходит только через бесконечно узкое кольцо.

Какой будет структура дифракционной картины в плоскости Π ? Каким будет угловой радиус центрального дифракционного пятна?

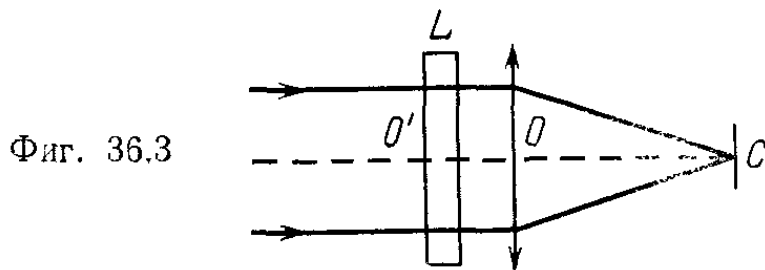
IV. Хаотическое расположение идентичных экранов

Заменим экран D тысячью маленьких непрозрачных экранов, хаотически распределенных в плоскости перед объективом O . Каждому экрану противолежит очень малый угол с вершиной в C , равный α_2 и такой, что $\alpha_2/\alpha_0 = 10^{-2}$. Определите освещенность в плоскости Π на расстоянии, равном величине $30/1,22$, умноженной на радиус дифракционного пятна, образованного свободным объективом (в отсутствие маленьких экранов). Пер-

воначально покажите, что условия таковы, что позволяют использовать теорему Бабине. В последней части этой задачи освещенность, создаваемая открытым зрачком в C , принимается равной единице.

V. Аподизация

Теперь объектив используется с полной апертурой (экраны удалены), и перед ним помещается стеклянная пластинка L с параллельными гранями (фиг. 36.3). На одной стороне пластинки L нанесена тонкая пленка с неравномерным поглощением, которая не вызывает фазового сдвига. Поглощающая



пленка наносится таким образом, чтобы поглощение было одинаковым для всех точек, расположенных на окружности, центр которой находится в O' на пересечении оптической оси объектива с пластинкой. Зависимость изменения амплитуды от α описывается выражением $e^{-a\alpha^2}$, где a — коэффициент, который соответствует максимальному поглощению.

Определите изменение освещенности в центре дифракционной картины.

Численный пример: $\alpha_0 = 1/5$ и $a = 1$.

Можно ли получить дифракционную картину, если поглощение на краю становится очень большим ($a \gg 1$)?

VI. Фокусирующие дефекты

Пластинка, используемая в предыдущем вопросе, заменяется теперь совершенно прозрачной пластинкой, которая имеет равномерно изменяющуюся толщину. Изменение толщины, как и в вопросе V, обладает цилиндрической симметрией относительно оптической оси объектива. Изменение толщины пластинки обуславливает изменение фазы (из-за разности хода), зависимость которой от α имеет вид $\epsilon\alpha^2/2$, где ϵ — коэффициент, который соответствует максимальной разности хода. Определите освещенность в точке C . Исследуйте изменение освещенности в центре дифракционной картины в зависимости от разности фаз $\Phi = \pi\epsilon\alpha_0^2/\lambda$ (λ — длина волны используемого света). Начертите кривую для значений Φ от 0 до 4π .

Покажите, что в случае удаления пластинки L и медленного смещения фокальной плоскости параллельно самой себе до некоторой точки изменение освещенности в центре дифракционной картины характеризуется этой же кривой.

Примечание. Для решения этой задачи не обязательно знать свойства функции Бесселя. Требуется всего лишь несколько полезных результатов:

$$\int_0^{2\pi} e^{-iKa\rho \cos \theta} d\theta = 2\pi J_0(Ka\rho),$$

$$\int_0^z J_0(z) z dz = Z \cdot J_1(Z).$$

Таблица численных значений

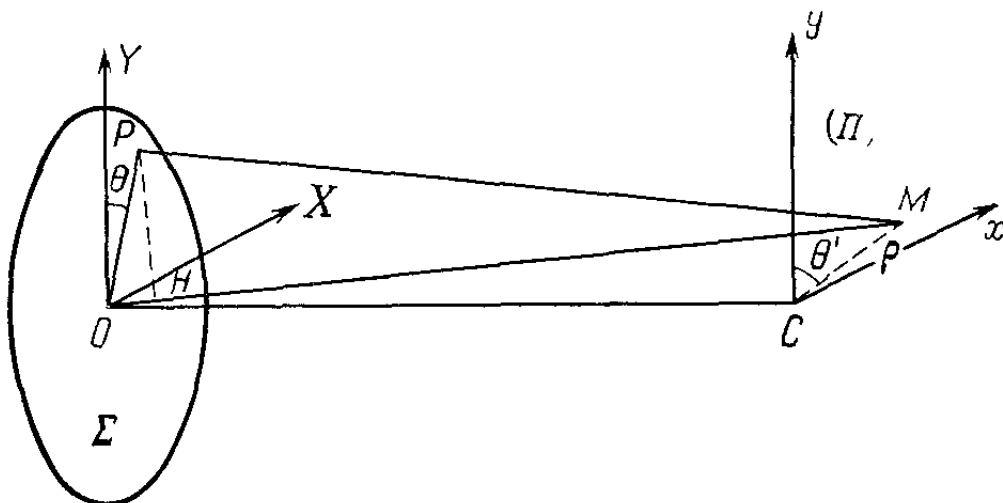
z	$J_0(z)$	$2 \frac{J_1(z)}{z}$	z	$J_0(z)$	$2 \frac{J_1(z)}{z}$
0,0	+1,000	+1,000	6,00	+0,151	−0,092
1,00	+0,765	+0,880	7,00	+0,300	−0,001
2,00	+0,224	+0,577	8,00	+0,172	+0,059
3,00	−0,260	+0,226	9,00	−0,090	+0,054
4,00	−0,397	−0,033	10,00	−0,246	+0,009
5,00	−0,178	−0,131			

$$J_0(Z) = 0 \quad \text{для} \quad Z = 2,405; 5,52; 8,65 \dots$$

$$J_1(Z)/Z = 0 \quad \text{для} \quad Z = 3,83; 7,02; 10,17 \dots$$

РЕШЕНИЕ

При решении этой задачи будут использоваться цилиндрические координаты, так как в рассматриваемых примерах мы имеем дело с вращательной симметрией (фиг. 36.4).



Фиг. 36.4

Определим амплитуду в точке M .

Общее выражение для амплитуды в точке M имеет вид

$$A(M) = \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} \alpha \rho \cos(\theta - \theta')\right] \alpha d\alpha d\theta. \quad (1)$$

Изменяя начало отсчета азимутов, можно написать

$$A(M) = \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \alpha \rho \cos \theta\right) \alpha d\alpha d\theta. \quad (2)$$

I. Открытый зрачок

1. Имеем

$$A(M) = 2\pi \int_0^{\alpha_0} J_0(K\rho\alpha) \alpha d\alpha, \quad (3)$$

$$A(M) = \frac{2\pi}{K^2 \rho^2} \int J_0(K\rho\alpha) \cdot (K\rho\alpha) d(K\rho\alpha) = \frac{2\pi}{K^2 \rho^2} (K\rho\alpha_0) J_1(K\rho\alpha_0),$$

$$A(M) = \pi\alpha_0^2 \frac{2J_1(Z)}{Z} \quad \text{с} \quad Z = \frac{2\pi}{\lambda} \rho\alpha_0. \quad (4)$$

Тогда интенсивность дифрагированного света в точке M равна

$$I(M) = (\pi\alpha_0^2)^2 \frac{4J_1^2(Z)}{Z^2}. \quad (5)$$

Распределение интенсивности приведено на фиг. 36.5.

«Объемная» дифракционная картина обладает вращательной симметрией относительно S . Первое темное кольцо соответствует $Z = 3,83$.

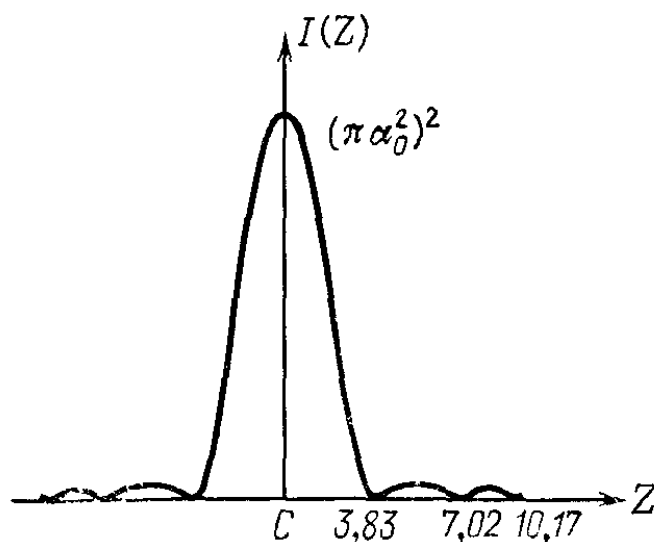
Центр дифракционного изображения всегда лежит на геометрическом изображении.

В точке S имеем

$$I(S) = (\pi\alpha_0^2)^2 \times 4 \left(\frac{J_0(0)}{0}\right)^2 = (\pi\alpha_0^2)^2. \quad (6)$$

Интенсивность всегда равна квадрату площади зрачка S .

Этот результат кажется парадоксальным, но он легко объясним. Действительно, дифракционное пятно «размазывается» по поверхности обратно пропорционально поверхности зрачка.



Фиг. 36.5

Следовательно, суммарный поток, равный объему «пространственной» дифракционной картины, пропорционален S .

2. Так как первое темное кольцо соответствует $Z = 3,83$, имеем

$$Z = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha \rho = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r_0}{f} \rho = \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \frac{\rho}{f} = \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \theta = 3,83;$$

следовательно,

$$\theta = \frac{3,83\lambda}{2 \cdot 3,14 r_0} = \frac{3,83 \cdot 0,6 \cdot 10^{-4}}{3,14 \cdot 6}.$$

$$\theta = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

II. Непрозрачный диск

1. Исходя из общего выражения для амплитуды, можно написать

$$A(M) = 2\pi \int_0^{\alpha_0} J_0(K\alpha\rho) \alpha d\alpha - 2\pi \int_0^{\alpha_1} J_0(K\alpha\rho) \alpha d\alpha, \quad (7)$$

$$A(M) = \pi\alpha_0^2 \frac{2J_1(Z_0)}{Z_0} - \pi\alpha_1^2 \frac{2J_1(Z_1)}{Z_1}, \quad (8)$$

где принято $Z_0 = \pi\alpha_0\rho$ и $Z_1 = \pi\alpha_1\rho$.

Тогда выражение для освещенности принимает вид

$$J(M) = \pi^2 \left\{ \alpha_0^4 \left[\frac{2J_1(Z_0)}{Z_0} \right]^2 + \alpha_1^4 \left[\frac{2J_1(Z_1)}{Z_1} \right]^2 - 2\alpha_0^2\alpha_1^2 \frac{2J_1(Z_0)}{Z_0} \frac{2J_1(Z_1)}{Z_1} \right\}. \quad (9)$$

Освещенность в точке C равна

$$I(C) = \pi^2\alpha_0^4 \left[1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right)^2 \right]^2, \quad (10)$$

тогда как в случае открытого зрачка она была равна $\pi^2\alpha_0^4$.

Для уменьшения интенсивности не более чем на 10% необходимо, чтобы

$$\left[1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right)^2 \right]^2 \geq 0,90, \quad \text{так что} \quad 1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right)^2 \geq 0,95,$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right)^2 \leq 0,05 \quad \text{или} \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \leq 0,22,$$

следовательно,

$$\frac{r_1}{r_0} \leq 0,22 \begin{cases} r_0 - \text{радиус объектива,} \\ r_1 - \text{радиус непрозрачного диска.} \end{cases} \quad (11)$$

Примечание. Результат, получаемый из (10), показывает, что мы не имеем права применять теорему Бабине вблизи геометрического изображения. Действительно, объектив, который имеет открытый зрачок радиусом r_1 , дает в точке C интенсивность

$$\pi^2 \alpha_1^4 \neq \pi^2 \alpha_0^4 \left[1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right)^2 \right]^2. \quad (12)$$

2. Радиус первого темного кольца. Амплитуда $A(M)$ равна нулю для таких значений ρ , когда

$$\alpha_0^2 \frac{J_1(Z_0)}{Z_0} - \alpha_1^2 \frac{J_1(Z_1)}{Z_1} = 0. \quad (13)$$

Возвращаясь к определению Z_1 и Z_0 и положив $m = \alpha_1/\alpha_0$, можно написать

$$J_1(Z_0) = m J_1(m Z_0). \quad (14)$$

В особом случае, когда $m = 0,5$, находим

$$J_1(Z_0) = 0,5 J_1(0,5 Z_0).$$

Используем таблицу

$$Z_0 = 3,14, \quad J_1(3,14) - \frac{1}{2} J_1(1,57) = +0,00185,$$

$$Z_0 = 3,15, \quad J_1(3,15) - \frac{1}{2} J_1(1,575) = -0,0023.$$

В результате линейной интерполяции получаем

$$Z_0 = 3,144.$$

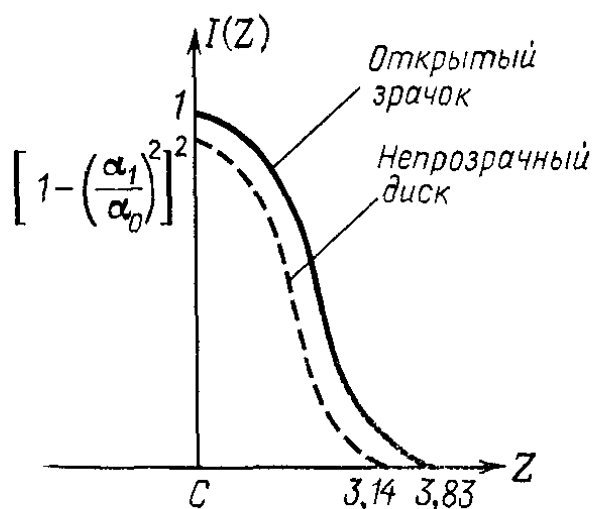
Таким образом,

$$\theta = \frac{3,144 \lambda}{2 \cdot 3,14 \cdot r_0} \approx \frac{\lambda}{2 r_0} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{60}; \quad \theta = 10^{-5} \text{ рад.}$$

3. Сравнение дифракционных изображений. На фиг. 36.6 изображены распределения освещенности в зависимости от Z для открытого зрачка и для непрозрачного диска. Можно видеть, что наличие непрозрачного центра приводит

к уменьшению освещенности центрального пика,
к небольшому улучшению разрешающей способности.

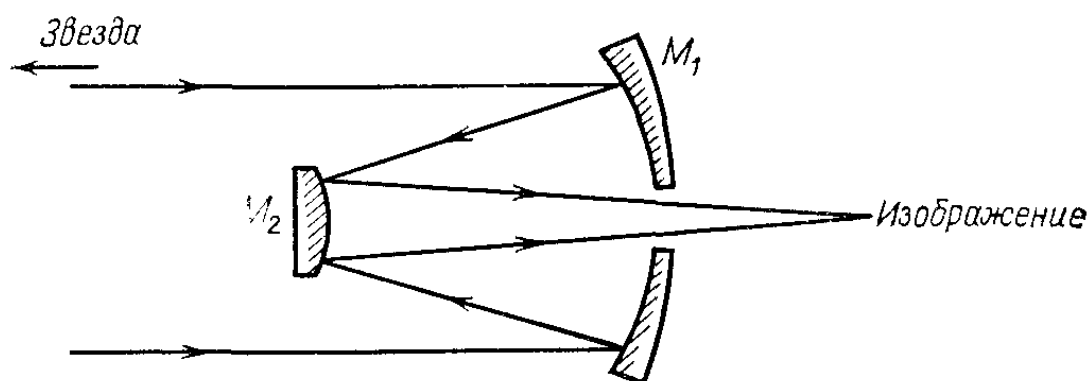
Примечание. На фиг. 36.6 изображается только центральный максимум. Если изучаются значения интенсивности для



Фиг. 36.6

$Z > 3,14$, то обнаруживается, что кольца играют значительно более важную роль в случае кривой Эйри.

Можно рассматривать эту задачу, используя соотношение Гейзенберга: если уменьшаются размеры зрачка, то дифракционная картина расплывается.



Фиг. 36.7

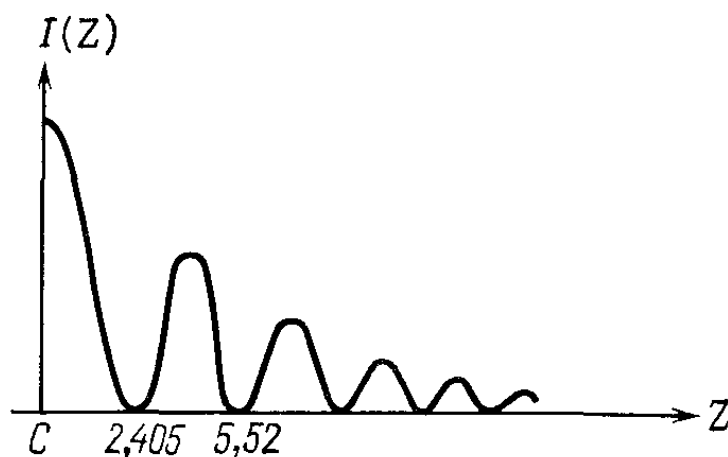
На практике этот пример реализуется в отражательных телескопах касегренского типа, показанного на фиг. 36.7. Такой прибор состоит из двух концентрических зеркал. Закрытие зрачка осуществляется при помощи маленького зеркала.

III. Кольцеобразный зрачок

Можно считать, что прозрачное кольцо соответствует постоянному значению α_0 , так как оно считается бесконечно тонким. При этих условиях амплитуда света в точке M становится равной

$$A(M) = 2\pi J_0(K\alpha_0\rho). \quad (15)$$

На фиг. 36.8 изображена зависимость $J_0(Z)$ от Z .



Фиг. 36.8

В этой задаче численные значения, приведенные в таблице, показывают, что уменьшение функции происходит не так быстро, как в случае диска Эйри. Первый минимум нулевого порядка на этой дифракционной картине соответствует первому

нулю функции $J_0(Z)$, а именно

$$Z = 2,405,$$

что дает $\theta = 0,77\lambda/2r_0$:

$$\theta = 0,77 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

Примечания. 1. Если закрыть зрачок, то освещенность колец увеличивается за счет освещенности центрального пика

2. Зрачок такого типа используется в фазово-контрастном микроскопе. Конденсор снабжен кольцеобразным зрачком. По сравнению с обычными наблюдениями при помощи микроскопа такое освещение приводит:

к потере яркости,
к улучшению разрешающей способности,
к значительному возрастанию роли дифракционных полос,
которые могут затруднить интерпретацию изображения.

IV. Хаотическое расположение идентичных экранов

Теперь амплитуда в точке M определяется выражением

$$A(M) = \underbrace{\iint_{\text{открытый зрачок}} e^{-iK\alpha\rho \cos\theta} \alpha d\alpha d\theta}_{\text{поверхность малых экранов}} - \iint e^{-iK\alpha\rho \cos\theta} \alpha d\alpha d\theta.$$

$$A(M) = A_1(M) - A_2(M). \quad (16)$$

Первый интеграл уже оценивался в первом вопросе задачи. Второй интеграл представляет собой амплитуду света, дифрагировавшего на N отверстиях, каждое из которых имеет те же размеры, что и малые непрозрачные экраны

$$A_2(M) = a_0(M) \sum_{n=1}^N e^{iK\delta_n} \quad (17)$$

(a_0 — амплитуда света, дифрагировавшего на малом отверстии, расположенном на оси прибора).

Применение принципа Бабинне

В этой задаче фиксируется расстояние $CM = \rho_2$. Если обозначить через ρ_1 радиус центрального дифракционного пятна, создаваемого открытым зрачком, то получим

$$\rho_2 = \frac{30}{1,22} \rho_1, \quad (18)$$

$$\rho_1 = \frac{1,22\lambda}{2\alpha_0}. \quad (19)$$

Тогда

$$\rho_2 = \frac{30\lambda}{2\alpha_0}. \quad (20)$$

Вычисляя амплитуду дифрагированного света для открытого зрачка в этой точке, получаем

$$A_1(M) = \pi\alpha_0^2 \frac{2J_1(Z)}{Z} \quad \text{с} \quad Z = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha_0 \rho_2 = 30\pi.$$

Для большого значения Z функция Бесселя первого порядка практически равна нулю. В этом особом случае можно утверждать, что

$$|A(M)| = |A_2(M)|, \quad (21)$$

следовательно,

$$I(M) = I_2(M),$$

$$I(M) = \underbrace{|a_0(M)|^2}_{\text{дифракционный член для одной малой апертуры}} \times \underbrace{\left| \sum_{n=1}^N e^{iK\delta_n} \right|^2}_{\text{интерференционный член}},$$

так что наконец

$$I(M) = |a_0(M)|^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N e^{iK\delta_n} \cdot e^{-iK\delta_m}.$$

Поскольку фазовое распределение является случайным, можно считать, что оно имеет как положительные, так и отрицательные члены.

Предыдущее уравнение дает

$$I(M) = N |a_0(M)|^2. \quad (22)$$

Несмотря на то что освещение когерентно, хаотическое распределение экранов нарушает фазовые соотношения; интенсивности суммируются так же, как в случае некогерентного освещения.

Точка M достаточно удалена от геометрического изображения, так что можно применить принцип Бабиня.

Численный пример:

$$a_0(M) = \pi\alpha_2^2 \frac{2J_1(Z_2)}{Z_2},$$

где

$$Z_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \rho_2 \alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{30\lambda}{2\alpha_0} \cdot 10^{-2} \alpha_0 \approx 1,$$

но

$$2J_1(1) \approx 1.$$

Таким образом, имеем

$$I(M) = N\pi^2\alpha_2^4 = N\pi^2\alpha_0^4 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right)^4.$$

Отсюда нормированная интенсивность

$$I(M) = N \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right)^4 = 10^3 \cdot 10^{-8},$$

$$I(M) = 10^{-5}.$$

V. Аподизация: поглощающий зрачок

Зрачок неравномерно прозрачен, как это было в предыдущем случае. Пропускание таково, что

$$\begin{aligned} \tau(\alpha) &= e^{-a\alpha^2} & \text{для } 0 < \alpha < \alpha_0, \\ \tau(\alpha) &= 0 & \text{для } \alpha > \alpha_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь общее выражение для амплитуды в точке M имеет вид

$$\int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} e^{-a\alpha^2} e^{-iK\alpha\rho \cos\theta} d\alpha d\theta. \quad (24)$$

В точке C

$$\begin{aligned} A(C) &= \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} e^{-a\alpha^2} \alpha d\alpha d\theta = \pi \int_0^{\alpha_0} e^{-a\alpha^2} d(\alpha^2), \\ A(C) &= \frac{\pi}{a} (1 - e^{-a\alpha_0^2}), \quad \text{отсюда } I(C) = \frac{\pi^2}{a^2} [1 - e^{-a\alpha_0^2}]^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Если $a\alpha_0^2$ очень мало, как это имеет место в данном случае, то можно представить разложение в ряд

$$A(C) = \frac{\pi}{a} \left[1 - 1 + a\alpha_0^2 - \frac{a^2\alpha_0^4}{2} \right] = \pi\alpha_0^2 \left[1 - \frac{a\alpha_0^2}{2} \right].$$

После введения пластинки имеем $A(C) = \pi\alpha_0^2$.

Отсюда нормированная интенсивность

$$I(C) = \left[1 - \frac{a\alpha_0^2}{2} \right]^2. \quad (26)$$

Численный пример:

$$\alpha_0 = \frac{1}{5}, \quad a = 1,$$

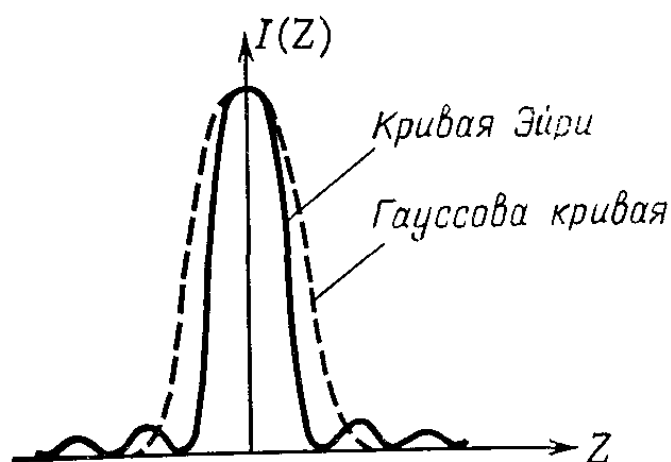
$$I(C) = [1 - 0,02]^2 = 1 - 0,04 = \frac{96}{100}.$$

Примечание. Возвращаясь к общему вычислению амплитуды, мы видим, что величины α и ρ являются сопряженными переменными (если принять длину волны в качестве единицы длины).

Результаты II и V также могут быть сформулированы на языке преобразования Фурье.

Первый пример: сужение размера α ведет к расширению размера ρ .

Второй пример: пропускание зрачка описывается гауссовой функцией $\tau(\alpha) = e^{-\alpha^2}$. Зная, что преобразованием Фурье для гауссовой функции является гауссова функция, можно сразу предсказать для амплитуд гауссово распределение в плоскости



Фиг. 36.9

изображения (фиг. 36.9). Не входя в детали, мы показываем на рисунке поперечное сечение «объемной» дифракционной картины с аподизирующей пластинкой и без нее. Аподизация вызывает исчезновение дифракционных колец, однако она не уменьшает разрешающую способность прибора.

VI. Фазовая пластинка, фокусирующие дефекты

Пластина L с равномерным пропусканием вызывает переменный фазовый сдвиг

$$\begin{aligned} \tau(\alpha) &= e^{-jK\epsilon\alpha/2} & \text{для } 0 < \alpha < \alpha_0, \\ \tau(\alpha) &= 0 & \text{для } \alpha > \alpha_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Имеем

$$\begin{aligned} (AC) &= \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} e^{-jK\epsilon\alpha^2/2} \alpha d\alpha d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha_0} e^{-jK\epsilon\alpha^2/2} d\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{2\pi}{-jK\epsilon} [e^{-jK\epsilon\alpha^2/2}]_0^{\alpha_0}. \end{aligned} \quad (28)$$

$$A(C) = \frac{2\pi}{jK\epsilon} [1 - e^{-j\Phi}]. \quad (29)$$

Теперь амплитуда в точке C является комплексной величиной. Интенсивность становится равной

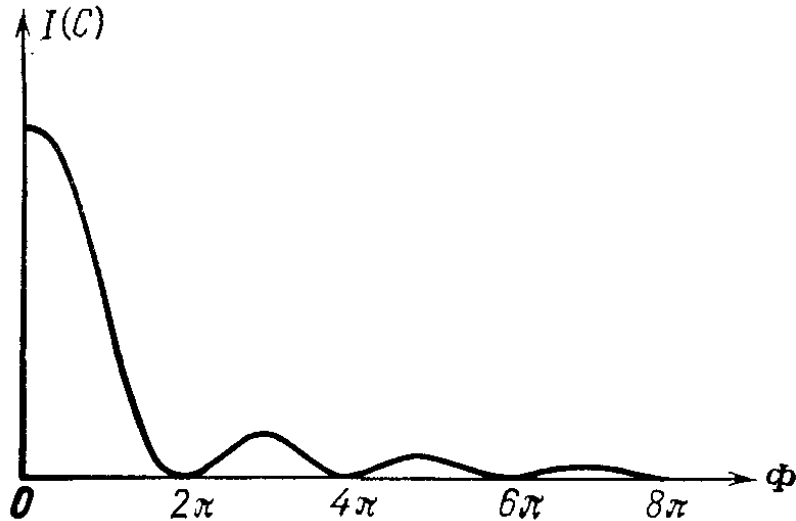
$$I(C) = A(C) \cdot A^*(C),$$

так что

$$I(C) = \frac{4\pi^2}{K^2 \epsilon^2} [1 - \cos \Phi] = \frac{16\pi^2}{K^2 \epsilon^2} \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

$$I(C) = \alpha_0^4 \left(\frac{\sin \Phi/2}{\Phi/2} \right)^2. \quad (30)$$

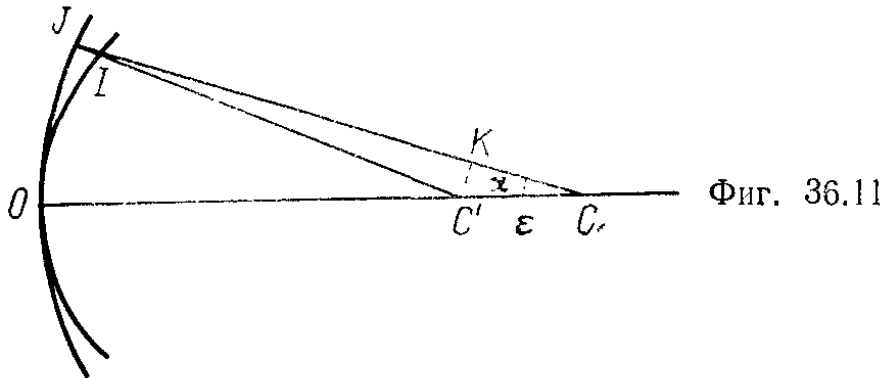
Зависимости $I(C)$ от Φ показаны на фиг. 36.10.



Фиг. 36.10

Фокусирующие дефекты

Сместите плоскость наблюдения на расстояние $CC' = \epsilon$. Согласно закону Малюса и принципу Ферма, разность хода Δ между лучом, проходящим через C , и лучом, проходящим через C' , равна расстоянию между фронтом отклоненной волны с цен-



тром в точке наблюдения C' и сферой с центром на гауссовом изображении (фиг. 36.11). Тогда находим

$$\Delta = IJ = CJ - IK - KC = R - C'I - KC = R - (R - \epsilon) - \epsilon \cos \alpha.$$

$$\Delta = \epsilon(1 - \cos \alpha) = \frac{\epsilon \alpha^2}{2}.$$

Можно видеть, что введенная выше фазовая пластинка производит тот же фазовый сдвиг, что и фокусирующий дефект.

Примечание. Используя предыдущие результаты, можно видеть, что центр дифракционного изображения будет попеременно то ярким, то темным, если перемещать фокусирующую плоскость от одной стороны гауссова изображения до другой. Этот метод используется в промышленности для проверки объективов. Действительно периодическая последовательность ярких и темных центральных изображений осуществляется лишь в том случае, когда объектив свободен от аберраций.

ЗАДАЧА 37

Опыт Аббе

Решетка Фраунгофера состоит из N параллельных непрозрачных линий, разделенных прозрачными интервалами. Коллиматор, который освещается монохроматическим светом, состоит из бесконечно тонкой щели F , помещенной в фокальной плоскости линзы L_1 . Вторая линза L_2 расположена за решеткой, а в фокальной плоскости изображения помещается фотопластинка. Используйте следующие обозначения и величины: период решетки $p = 10$ мкм, число линий $N = 5000$, длина волны света $\lambda = 1,0$ мкм, $f_1 = 50$ см — фокусное расстояние линзы L_1 ; f_2 — фокусное расстояние линзы L_2 и, наконец, i — угол, который дифрагированные лучи образуют с нормалью к решетке.

I

Прозрачные линии решетки бесконечно тонкие.

1. Определите значения $\sin i$ для различных изображений, образованных щелью F при условии нормального падения.

2. Получите выражение, дающее угловую ширину главного максимума на дифракционной картине. Найдите теоретическую разрешающую силу в спектрах различных порядков. Определите фокусное расстояние f_2 , при котором на фотопластинке видны все детали изображения, которые позволяет различить разрешающая сила. (Считайте, что фотографическая пластинка точно разделяет два изображения с линейным промежутком 20 мкм.)

II

Если щель F больше не является узкой, то каким будет максимальное значение ее ширины, при которой мы сможем использовать разрешающую способность решетки?

III

Пусть ширина непрозрачных интервалов равна $2p/3$.

В следующих вопросах считайте щель источника очень узкой, а свет монохроматическим.

1. Начертите кривую, изображающую освещенность в фокальной плоскости линзы L_2 как функцию от $\sin i$.

2. Замените фотопластинку линзой L_3 , фокусное расстояние которой равно $f_3 = f_2/2$. Что наблюдается на экране, помещенном на расстоянии f_2 от линзы L_3 , в следующих трех случаях:

а) через линзу L_3 может проходить только нулевой порядок изображения, б) могут проходить только порядки ± 1 и в) проходит вся дифракционная картина.

IV

Рассмотрим другую решетку, имеющую тот же период и то же число штрихов, но ширина непрозрачных линий равна $p/3$. Покажите, что для той же амплитуды падающей плоской волны амплитуды изображения первых двух порядков дифракции одинаковы для обеих решеток. Каково отношение амплитуд в нулевом порядке дифракции? Покажите, что результаты IV могут быть связаны с теоремой Бабине.

РЕШЕНИЕ

I. Бесконечно узкий источник-линия

Характеристики решетки:

бесконечно узкие щели,
период решетки p ,
ширина решетки $L = Nr$.

Дифракция обнаруживается только в плоскостях, нормальных к щелям решетки.

Вдоль линий, параллельных щелям, интерференция не наблюдается.

1. *Положение дифракционных максимумов (нормальное падение)*. Между двумя гомологичными лучами имеется разность хода (фиг. 37.1)

$$\delta = p \sin i, \quad (1)$$

следовательно, сдвиг фазы будет

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} p \sin i. \quad (2)$$

Интерференция происходит, если

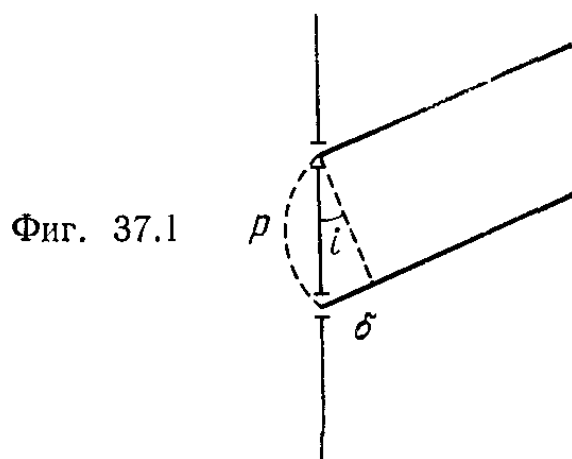
$$p \sin i = k\lambda \quad (k — \text{целое число}).$$

Отсюда получаем значения i , соответствующие дифракционным максимумам

$$\sin i = \frac{k\lambda}{p}. \quad (3)$$

Численный пример: $\sin i = k \times 1/10$.

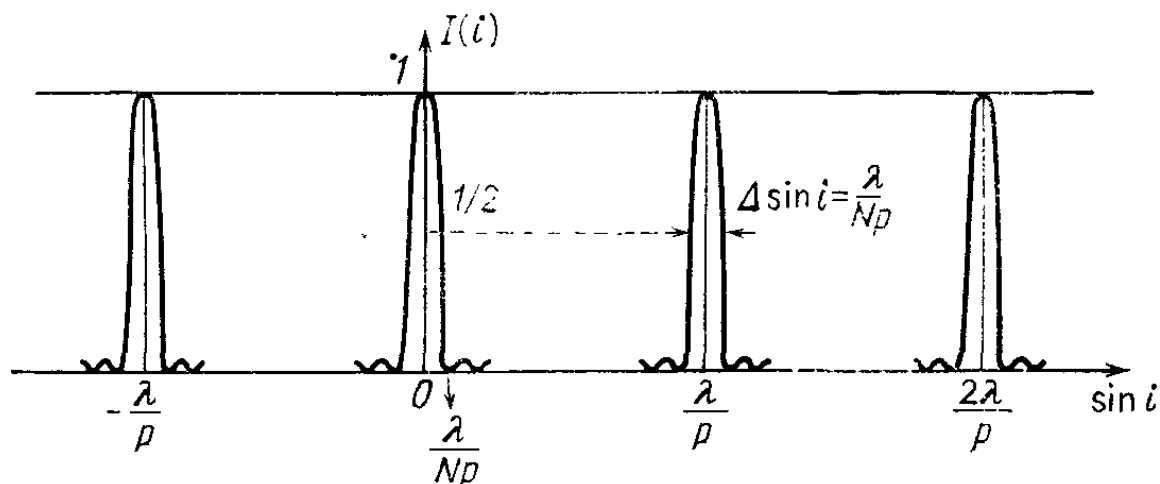
Условие $\sin i \leq 1$ соответствует $k \leq 10$.



2. Разрешающая сила. Каждая щель дает сильно размытую дифракционную картину. Интенсивность света, дифрагированного под углом i , равна

$$I(i) = A(i) A^*(i) = \frac{\sin^2 N\varphi/2}{\sin^2 \varphi/2}. \quad (4)$$

Главные максимумы определяются условием $\varphi/2 = k\pi$. Нулевые



Фиг. 37.2

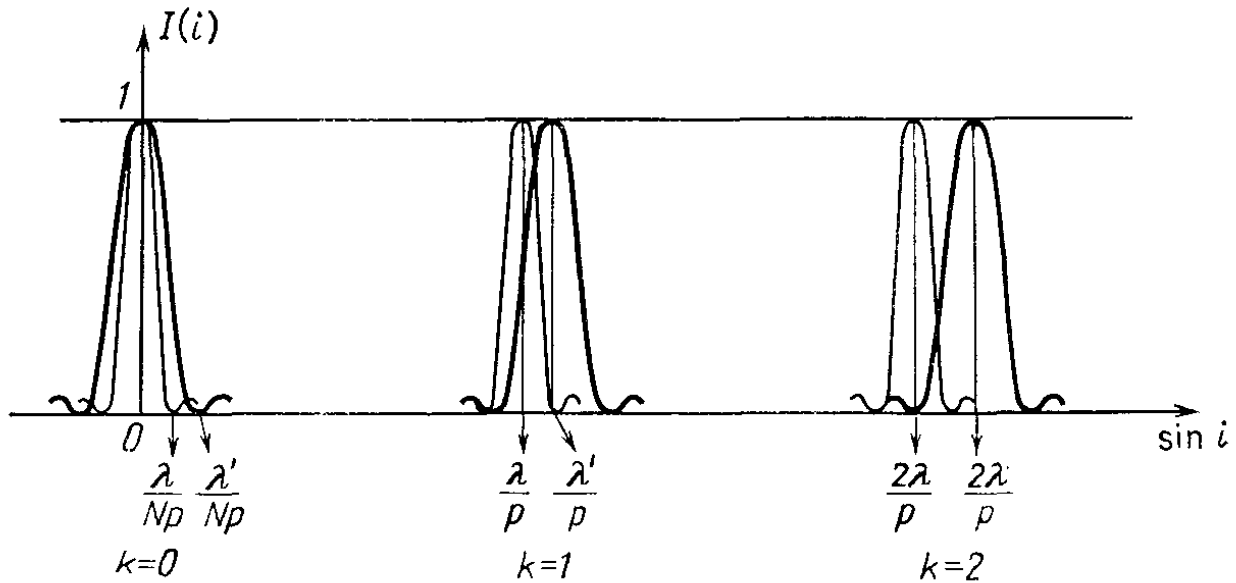
минимумы соответствуют $N\varphi/2 = k'\pi$ ($k'/N \neq k$). Изменения интенсивности I представлены на фиг. 37.2. Считая $\sin i$ перемен-

ной величиной, можно видеть, что все дифракционные изображения идентичны и дают

одинаковую освещенность,
одинаковую ширину линии $\Delta \sin i = \lambda/Np$,
промежуток между линиями λ/p .

Наблюдается девятнадцать линий ($\sin i < 1$).

Считаем, что источник испускает две длины волны λ и λ' . Так как отклонение, производимое решеткой, пропорционально длине волны, то световое распределение подобно изображен-



Фиг. 37.3

ному на фиг. 37.3. Для длины волны λ положения максимумов соответствуют $\sin i = k\lambda/p$ и ширина дифракционного пика становится равной

$$\Delta \sin i = \frac{\lambda}{Np},$$

так что

$$\Delta i = \frac{\lambda}{Np \cos i}. \quad (5)$$

Для длины волны λ' вблизи λ (причем $\lambda' = \lambda + d\lambda$) положение максимумов определяется выражением

$$\sin i' = k \frac{\lambda'}{p}. \quad (6)$$

В спектре порядка k существует два линейных изображения, соответствующих λ и λ' , они разделены на $\delta(\sin i) = \cos i \delta i$, отсюда

$$\delta i = \frac{k}{\cos i} \left[\frac{\lambda'}{p} - \frac{\lambda}{p} \right] = \frac{k}{\cos i} \frac{d\lambda}{p}. \quad (7)$$

По принятому правилу считаем, что два изображения разрешаются, если максимум одного приходится на минимум другого, т. е. если

$$\Delta i = \delta i.$$

Уравнения (5) и (7) тогда дают

$$\frac{\lambda}{Np \cos i} = k \frac{d\lambda}{p}.$$

Отсюда разрешающая сила решетки равна

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = kN = k \cdot 5000. \quad (8)$$

Примечание. Величина R максимальна для максимального k , в результате чего следует использовать спектры высокого порядка. Величина R минимальна для $k = 1$ ($R = 5000$). В этих спектрах можно разделить две линии, если

$$d\lambda = \frac{\lambda}{5000} = \frac{1000}{5000} = 2 \text{ \AA}. \quad (9)$$

Угловое разрешение для этих двух линий будет определяться выражением

$$\Delta i = \frac{\lambda}{Np \cos i} \approx \frac{\lambda}{Np} = \frac{1}{10 \cdot 5000} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \quad (10)$$

и их линейное разрешение в плоскости изображения будет равно

$$\Delta x = f_2 \Delta i. \quad (11)$$

Теперь необходимо учесть разрешающую силу приемника $dx = 20$ мкм. Две линии разрешены на фотопластинке, если

$$\Delta x > dx \quad \text{или} \quad f_2 \Delta i > dx. \quad (12)$$

Тогда минимальное фокусное расстояние линзы L_2 равно

$$f_2 = \frac{dx}{\Delta i} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-4}}.$$

Фокусное расстояние для разрешения равно $f_2 = 1$ м.

II. Источник-щель конечной ширины (некогерентное освещение)

Ширину источника-щели можно увеличить таким образом, чтобы произошло увеличение яркости без уменьшения разрешающей силы решетки. Пусть d будет предельной шириной источника, которую можно получить без изменения вида изображения.

Для рассмотрения этой задачи можно использовать два метода: либо получить выражение, дающее распределение освещен-

ности изображения в зависимости от ширины щели, и сравнить его с результатами, найденными в 1, а затем вывести выражение для максимальной ширины либо определить непосредственно степень когерентности источника.

Первый метод

Определим $I(u)$ для источника-щели конечной ширины. Задача одномерна. Обозначим через x абсциссу любой точки зрчка и через u такую сопряженную переменную, что $u = \sin i/\lambda$. Так как освещение некогерентно, то интенсивности света, дифрагировавшего от каждой точки на объекте, суммируются в плоскости изображения. Результирующая интенсивность в точке M' в плоскости изображения будет равна

$$I(u') = \int O(u) D(u' - u) du = O(u) \otimes D(u), \quad (13)$$

где $O(u)$ — распределение света на объекте,

$D(u)$ — распределение света в дифракционном изображении точечного источника (единичный импульс).

Теорема Парсеваля позволяет преобразовать свертку (13) в произведение (см. приложение А, Б, II):

$$i(x) = o(x) \cdot d(x), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} O(u) &\xrightarrow{\text{Ф. Т.}} o(x), \\ D(u) &\xrightarrow{\text{Ф. Т.}} d(x), \\ I(u) &\xrightarrow{\text{Ф. Т.}} i(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Определение преобразования Фурье

$$\boxed{o(x)}$$

$O(u)$ — функция ширины u_0 .

Получаем (см. приложение А)

$$\begin{aligned} o(x) &= \frac{\sin \pi u_0 x}{\pi u_0 x}, \\ \boxed{d(x)} & \end{aligned} \quad (16)$$

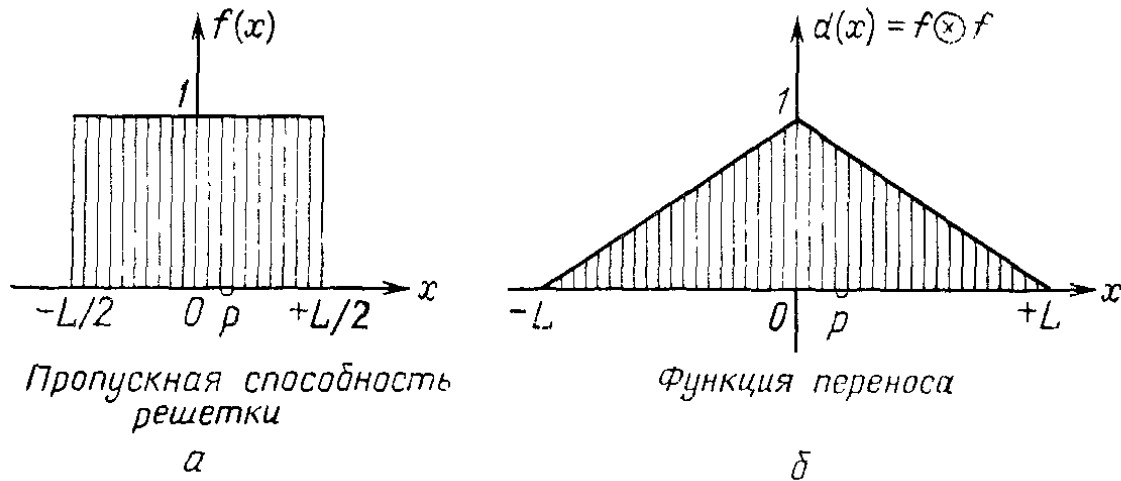
1. $d(x)$ — аппаратная функция прибора. В этом случае необходимо определить автокорреляционную функцию решетки с бесконечно узкими щелями, периодом p и шириной $L = Np$

(фиг. 37.4, а и б). При определении произведения $o(x) \cdot d(x)$ можно рассмотреть множество случаев.

Если источник имеет вид чрезвычайно узкой щели, то кривая $o(x)$ сильно растянута (фиг. 37.5) и тогда

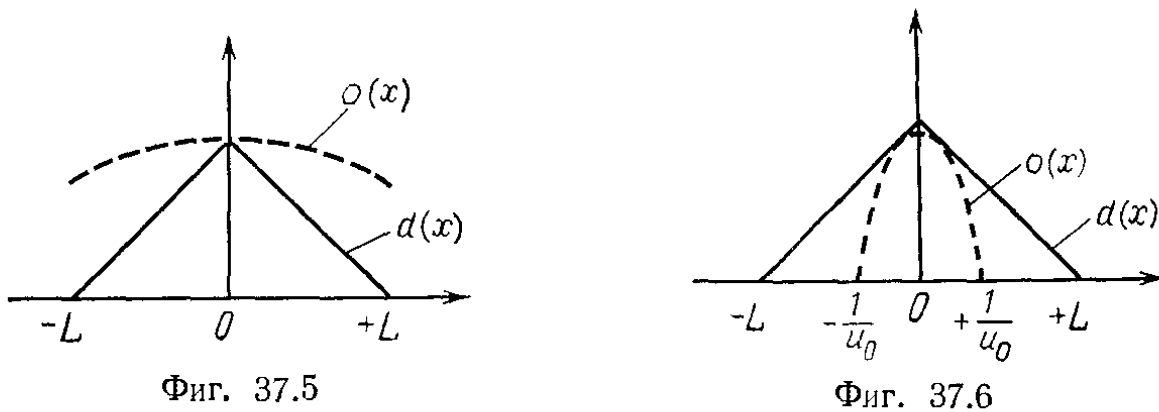
$$o(x) \cdot d(x) \approx d(x). \quad (17)$$

Распределение света в изображении определяется функцией $D(u)$.



Фиг. 37.4

Если щель широко открыта, то ширина $o(x)$ может быть меньше, чем ширина $d(x)$, и произведение $o(x) \cdot d(x)$ может очень сильно отличаться от dx (фиг. 37.6).



Нас интересует здесь только последний случай. Имеем

$$i(x) = d(x),$$

т. е. $I(u) = D(u)$, если функция $o(x)$ примерно равна единице при $-L < x < +L$. Предположим, что это условие выполняется при

$$\frac{1}{4} \frac{1}{u_0} > L \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} \frac{\lambda f_1}{d} > L, \quad (18)$$

тогда

$$d < \frac{\lambda_1}{4L}. \quad (19)$$

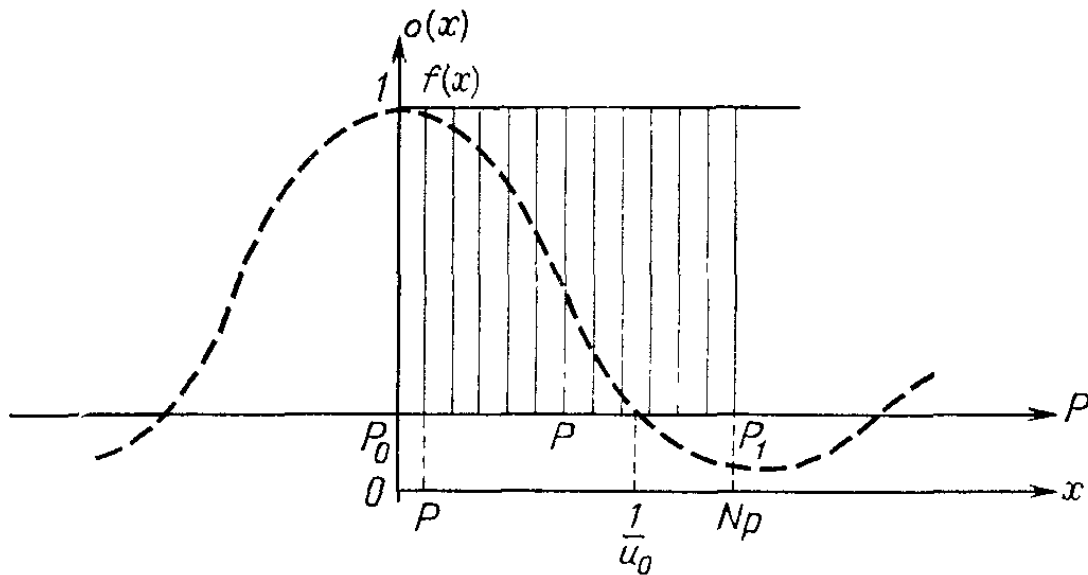
Численный пример:

$$d < \frac{1 \cdot 50 \cdot 10^4}{4 \cdot 10 \cdot 5000} = 2,5 \text{ мкм.}$$

Второй метод

Применим теорему Ван Циттерга — Цернике, которая сформулирована и доказана в приложении Б.

В плоскости зрачка (плоскость решетки) помещаем искусственное дифракционное пятно с центром в точке P_0 (точка P_0



Фиг. 37.7

соответствует краю решетки). Распределение амплитуды в этом дифракционном пятне равно преобразованию Фурье для распределения энергии в плоскости источника.

Пусть

$$o(P) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} O(M).$$

Конечно, такого дифракционного пятна не существует в плоскости xOy , которая в действительности равномерно освещается источником. Однако амплитудное распределение в дифракционном изображении равно распределению степени когерентности света в плоскости зрачка.

Степень когерентности между точкой P (любая точка в плоскости зрачка) и точкой P_0 равна нормированной амплитуде $o(P)$, т. е., скажем, $o(x)$ (фиг. 37.7).

На фиг. 37.7 изображены функция $o(x)$ (пунктиром) и пропускательная способность зрачка (амплитудная) $f(x)$.

Степень когерентности между P и P_0 будет равна единице, если $o(P) = 1$. Освещение решетки будет считаться когерентным, если $o(P_1) = 1$, т. е. если $o(Np) = o(L) = 1$.

Мы считаем, что это условие выполняется, если

$$\frac{1}{4u_0} > L.$$

Тогда мы вновь получаем (18).

III. Опыт Аббе

В последней части задачи будем считать освещение когерентным.

1. Прозрачные линии имеют конечную ширину $p/3$. Амплитудное пропускание зрачка показано на фиг. 37.8.

На каждой щели шириной $2p/3$ амплитуда света, дифрагировавшего под углом i , равна

$$A(i) = \frac{p}{3} \frac{\sin \pi [(p/3) (\sin i/\lambda)]}{\pi (p/3) (\sin i/\lambda)}. \quad (20)$$

Интенсивность (нормированная) света, пропущенного N щелями под этим углом, определяется выражением

$$I(i) = \left(\frac{\sin \varphi/6}{\varphi/6} \right)^2 \left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} \right)^2 \quad (21)$$

где

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} p \sin i.$$

Изменение функции I в зависимости от $\sin i$ представлено на фиг. 37.9. Спектры порядков ± 3 , ± 6 , ± 9 исчезают.

2. Линза L_3 помещается между точками, расположенными на двойном фокусном расстоянии. Если решетка расположена за L_2 , то ее изображение образуется в O'_2 с единичным увеличением (фиг. 37.10). Пусть u и x будут сопряженными переменными ($u = \sin i/\lambda$). Амплитудное распределение в плоскостях R , L_3 и O'_2 определяется соответственно функциями

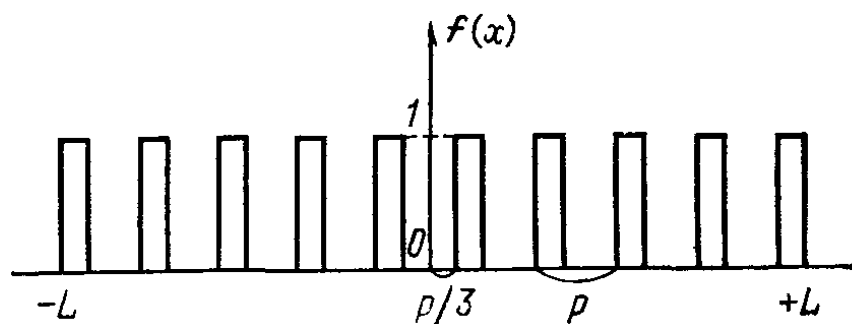
$$\begin{aligned} f(x), \\ F(u) \text{ до введения линзы-затвора, } \Phi(u) \text{ — после} \end{aligned} \quad (22)$$

введения линзы-затвора.

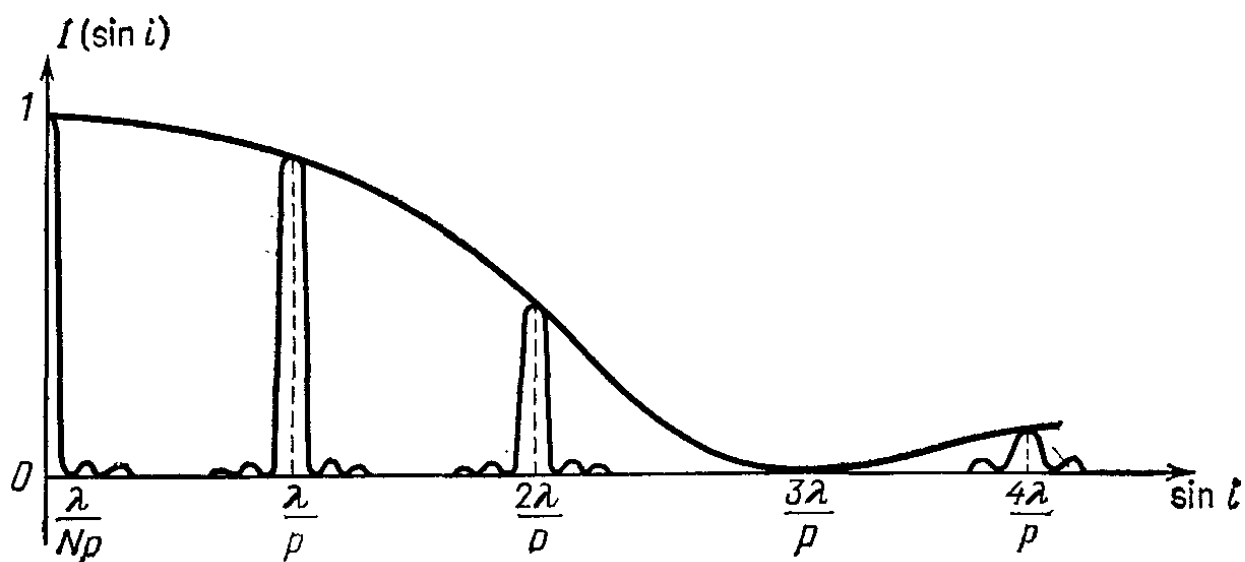
$$\varphi(x)$$

а) L_3 действует как затвор в том смысле, что она пропускает только спектр нулевого порядка. Таким образом,

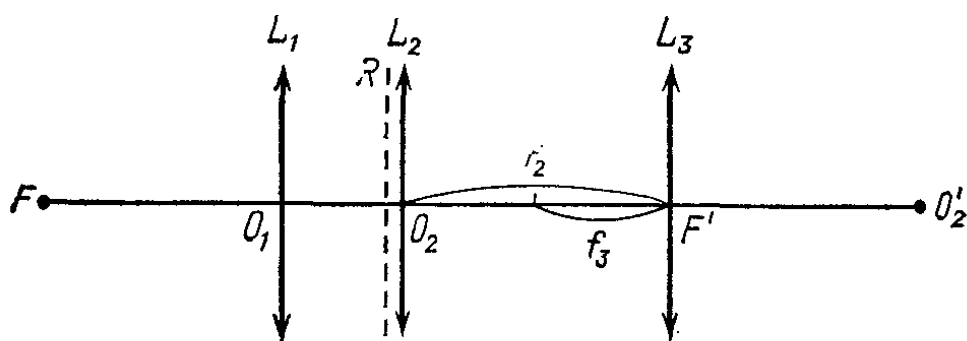
$$\Phi(u) = \frac{\sin \pi u L}{\pi u L}. \quad (23)$$



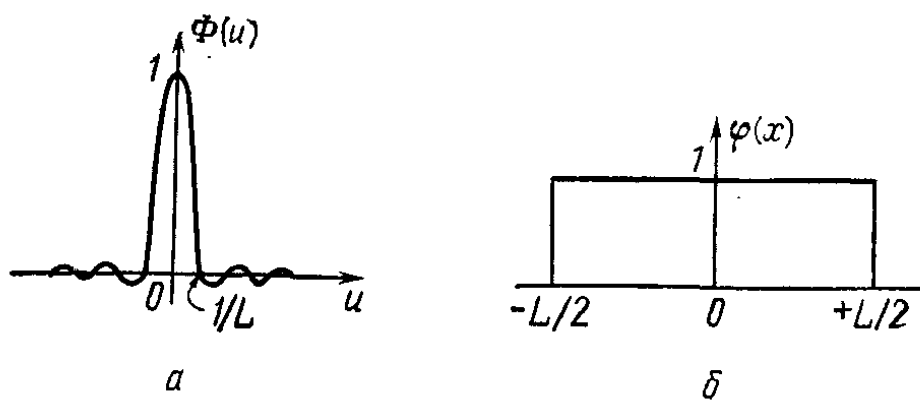
Фиг. 37.8



Фиг. 37.9



Фиг. 37.10



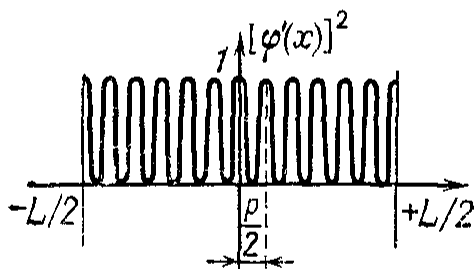
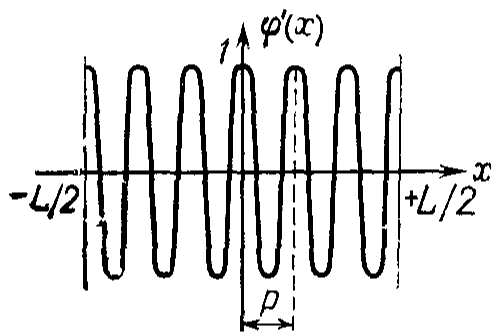
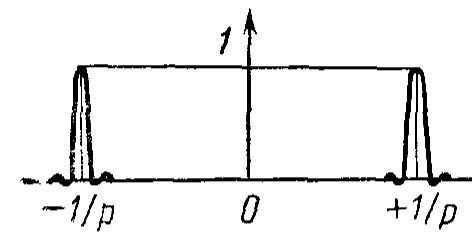
Фиг. 37.11

где $\Phi(u)$ — амплитуда света, дифрагировавшего от щели шириной L . Таким образом, окончательное изображение состоит из равномерно освещенных полос, имеющих ширину L и высоту решетки.

На языке преобразования Фурье

$$\varphi(x) = \text{Ф. Т.} [\Phi(u)] = \begin{cases} 1 & \text{при } -L/2 < x < L/2, \\ 0 & \text{для других случаев.} \end{cases} \quad (24)$$

Эти две функции изображены на фиг. 37.11, а и 37.11, б.



Фиг. 37.12

б) Пропускаются только спектры порядка $+1$ и -1 .

Эти два спектра образуют два вторичных источника, которые когерентны, находятся в фазе и создают полосы типа полос Юнга. Действительно, если обозначить через $\Phi'(u)$ амплитудное распределение после прохождения через линзу L_3 , то получим (фиг. 37.12, а)

$$\Phi'(u) = \Phi\left(u + \frac{1}{p}\right) + \Phi\left(u - \frac{1}{p}\right). \quad (25)$$

Таким образом, амплитудное распределение в плоскости изображения будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \text{Ф. Т.} [\Phi'(u)] = \\ &= \varphi(x) e^{i2\pi x/p} + \varphi(x) e^{-i2\pi x/p} \\ \varphi'(x) &= 2\varphi(x) \cos 2\pi \frac{x}{p}. \end{aligned} \quad (26)$$

Изображение состоит из полос Юнга с периодом $p/2$ и шириной L (фиг. 37.12, б и 37.12, в).

в) Линза L_3 пропускает все пространственные частоты. Тогда имеем

$\Phi(u) = F(u)$, отсюда $\varphi(x) = f(x)$. Изображение и объект идентичны.

Заключение. Если исключить или ослабить некоторые пространственные частоты, то можно изменить изображение.

Рассмотрим два примера.

а) Проходит основная частота, и изображение решетки полностью исчезает,

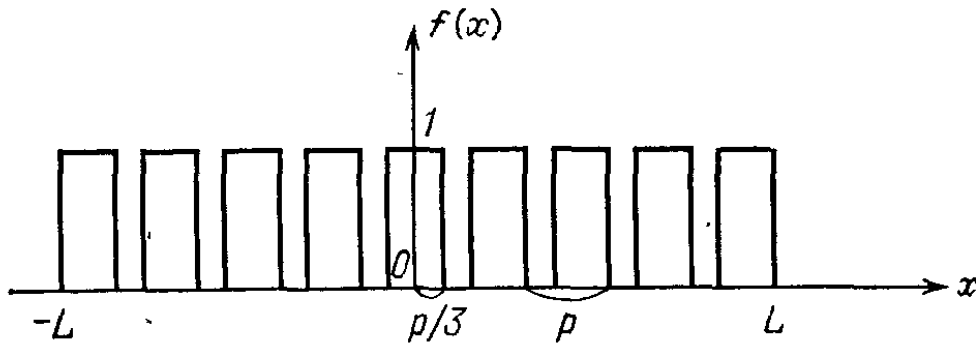
б) Проходят первые две гармоники, и имеет место периодическая освещенность в плоскости изображения.

Однако даже если период решетки равен p , то период изображения равен $p/2$.

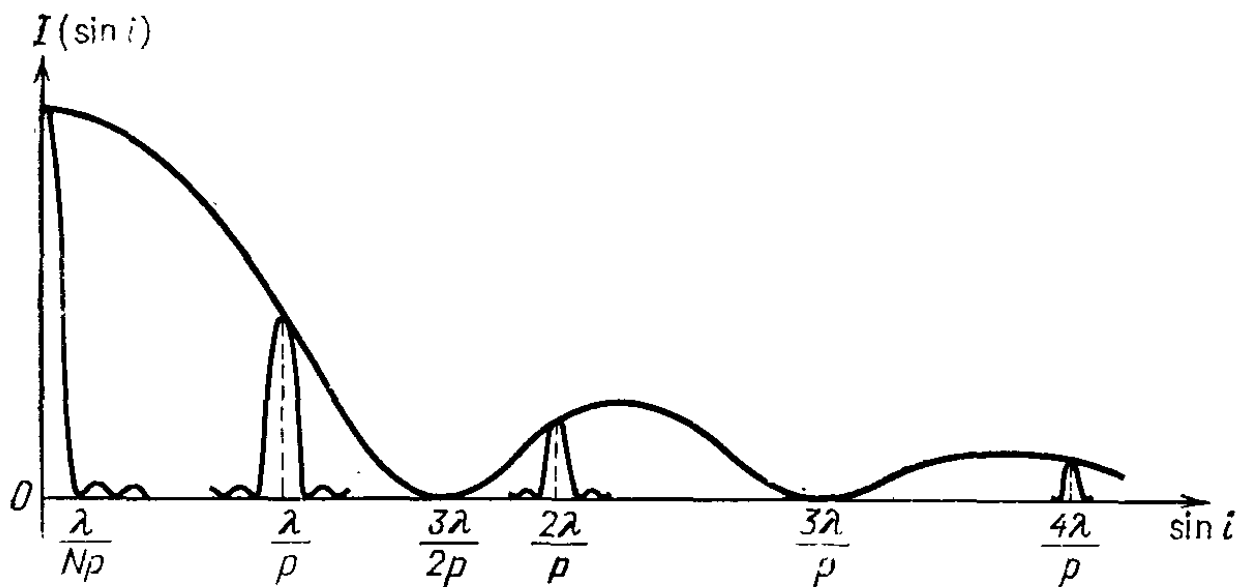
в) Линзы должны иметь бесконечную апертуру, чтобы проходили все пространственные частоты, тогда изображение воспроизведет объект. На практике объективы всегда имеют конечную апертуру, ограниченную необходимостью ликвидировать aberrации. На фиг. 37.11 и 37.12 видно, что часто довольно трудно воспроизвести объект по изображению.

IV. Дополнительная решетка

Функции $f(x)$ и $I(\sin i)$ представлены на фиг. 37.13 и 37.14. В табл. 37.1 приведены итоги действия решетки, рассмотренной



Фиг. 37.13



Фиг. 37.14

выше (I), и данной решетки (II). Разумеется, так как сравниваются интенсивности, мы больше не нормируем результаты.

Таблица 37.1

	Решетка I	Решетка II
Ширина	L	L
Период	p	p
Ширина щели	$p/3$	$2p/3$
$A(u)$	$\frac{Np}{3} \frac{\sin \pi u p/3}{\pi u p/3}$	$N \frac{2p}{3} \frac{\sin \pi u 2p/3}{\pi u 2p/3}$
Спектры нулевого порядка: $A(0)$	$\frac{Np}{3}$	$N \frac{2p}{3}$
Спектры первого порядка: $A(1/p)$	$\frac{Np}{3} \frac{\sin \pi/3}{\pi/3}$	$N \frac{2p}{3} \frac{\sin 2\pi/3}{2\pi/3}$

Видно, что

$$A_{II}(0) = 2A_I(0),$$

$$A_{II}\left(\frac{1}{p}\right) = A_I\left(\frac{1}{p}\right).$$

Для центрального изображения отношение амплитуд равно двум. Мы находим, что у спектров одинаковые амплитуды.

Это и служит подтверждением теоремы Бабиня: два дополнительных экрана дают одинаковую освещенность во всех точках пространства, не освещенного в их отсутствие (в отсутствие экранов имелось центральное изображение, создаваемое зрачком шириной L).

ЗАДАЧА 38

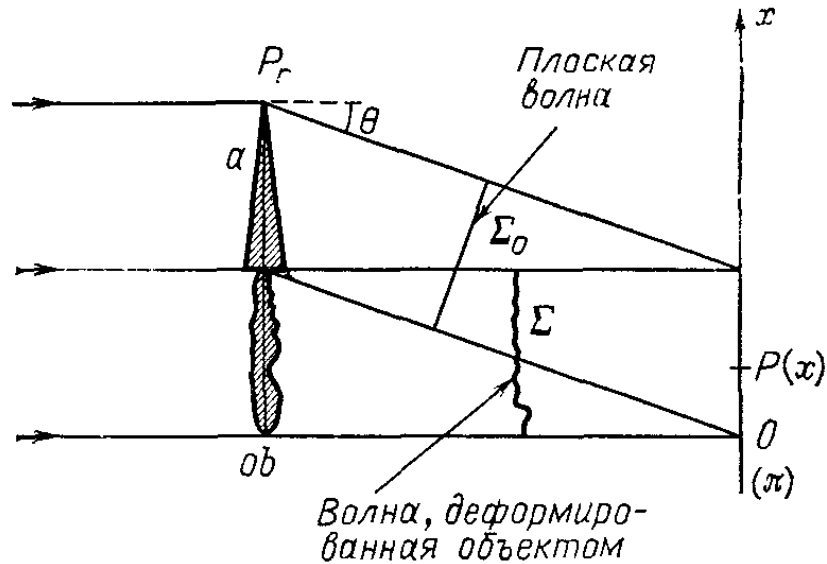
Голография

I. Регистрация голограммы

Когерентная монохроматическая плоская волна падает на установку, изображенную на фиг. 38.1, где Pr — призма с малым углом при вершине a и показателем преломления n ; Ob — объект, исследуемый на пропускание. На плоскости $P(x)$ изучается интерференция между волной Σ с комплексной амплитудой $A(x) \cdot e^{i\Phi(x)}$, пропускаемой объектом, и волной Σ_0 , известной как опорная волна, которая отклоняется призмой и имеет амплитуду $A_0(x) e^{i\Phi_0(x)}$. Будем считать, что объект не дает дифракции. Определите функцию интенсивности $I(x)$, найдя соотношения между отклонением θ на призме и фазой опорной волны.

II

Результаты регистрируются на фотопластинке, установленной в плоскости π . Подбираются такие условия, чтобы работать в линейной части ее характеристики, т. е. в области, где плотность D определяется выражением $D = \gamma \ln E$. Найдите соотношение, связывающее $I(x)$ с амплитудной функцией пропускания $t(x)$



Фиг. 38.1

проявленной пластинки, которая называется *голограммой*. Покажите, что $t(x)$ принимает простую форму, если $|A(x)|^2 \ll |A_0|^2$ (ищем разложение в ряд функции $t(x)$, где значащие члены легко интерпретируются для значений γ , например, вблизи 3 или 4).

III. Восстановление формы объекта

В полученном выражении для $t(x)$ объясните роль каждого из членов. Голограмма ведет себя подобно решетке, помещенной в параллельный монохроматический пучок. (Можно обнаружить эффект «увеличения», связанный с длиной волны.) Покажите, как восстанавливается волна Σ .

IV. Голографические линзы (фиг. 38.2)

1. Опорный луч остается неизменным. Объект заменяется непрозрачным экраном, имеющим небольшое отверстие T . Падающая плоская волна преобразуется в результате дифракции в сферическую волну Σ с центром в T . Расстояние от T до пластинки обозначим f .

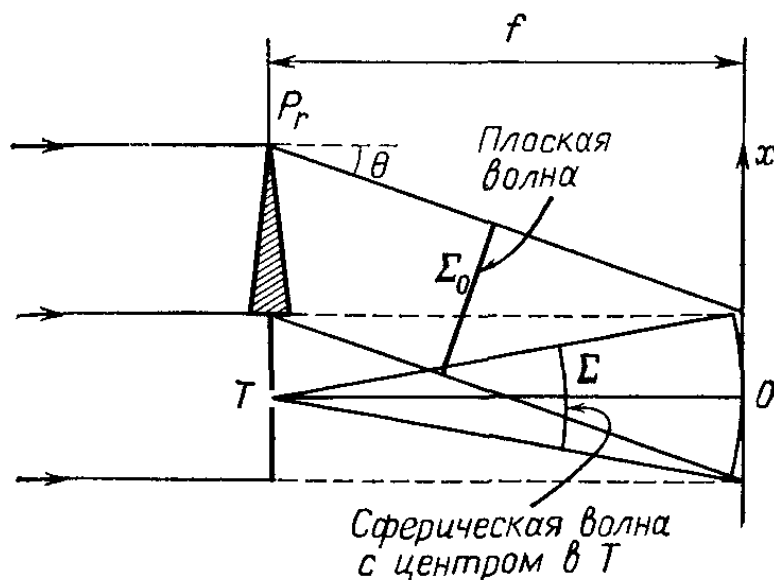
- а) Напишите выражения для функций $I(x)$ и $t(x)$.
- б) Как и прежде, голограмма освещается когерентной плоской волной с длиной λ .

Покажите, что голограмма воздействует на эту волну как:

фокусирующая линза с фокусным расстоянием f при наблюдении в направлении $-\theta$,
 рассеивающая линза при наблюдении в направлении $+\theta$.

2. Экран имеет два одинаковых отверстия T_1 и T_2 , симметричных относительно оси OT и разделенных промежутком $2d$. Волны Σ_0 и Σ имеют длину λ .

а) Напишите выражения для функций $I(x)$ и $t(x)$.



Фиг. 38.2.

б) Эта новая голограмма освещается теперь точечным источником S , расположенным на расстоянии p от центральной линии голограммы и испускающим длину волны λ' .

Найдите расстояние $2D$, которое отделяет изображения T'_1 и T'_2 от T_1 и T_2 . Найдите увеличение голографических линз как функцию p , f , λ и λ' .

V. Синусоидальная решетка

Фотоснимок интерферограммы, полученной при интерференции двух волн с сильно различающимися амплитудами $A_1 \gg A_2$ (если зеркала при $\delta_0 = 0$ наклонены под углом θ друг к другу), есть не что иное, как голограмма. Покажите, что $I(x) = I(\delta)$ и что при освещении такой фотопластинки когерентным светом получается непосредственно спектральное распределение источника. Докажите это при помощи простой установки.

РЕШЕНИЕ

Введение

После прохождения через объект Ob электромагнитная волна имеет амплитуду вида $\mathcal{A} = A(x)e^{j\Phi(x)}$. Для описания структуры волны требуется как вещественная, так и комплексная ампли-

туды. Большинство приемников (фотопластинки) чувствительны к изменениям освещенности, но не дают информации о фазе. Метод, предложенный здесь, позволяет полностью восстановить волну Σ .

I. Регистрация голограммы

Опорная волна отклоняется на угол

$$\theta = (n - 1) a.$$

Эта волна Σ_0 имеет постоянную амплитуду A_0 . Ее фаза $\Phi_0(x)$ изменяется линейно как функция x в плоскости π . Имеем

$$\Phi_0(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \theta x. \quad (1)$$

Здесь во всех задачах начало отсчета фазы выбирается на оси Ox и предполагается, что лучи, интерферирующие в точке O , находятся в фазе. Волны, которые не пересекли ось Ox , имеют положительную разность фаз, а волны, которые пересекли ось Ox , имеют отрицательную разность фаз.

Результирующая амплитуда в точке $P(x)$ определяется выражением

$$A_0 e^{-i\Phi_0(x)} + A(x) e^{i\Phi(x)}. \quad (2)$$

Результирующая интенсивность будет

$$\begin{aligned} I(x) &= [A_0 e^{-i\Phi_0(x)} + A(x) e^{i\Phi(x)}] [A_0 e^{+i\Phi_0(x)} + A(x) e^{-i\Phi(x)}], \\ I(x) &= A_0^2 + A^2(x) + 2A_0 A(x) \cos [\Phi_0(x) + \Phi(x)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Примечание. Фаза $\Phi(x)$ содержится в выражении для функции $I(x)$. Изменение функции $\Phi(x)$ влечет за собой изменение периода или положения полос. Изменение функции $A(x)$ изменяет контрастность полос.

II. Амплитуда света, пропускаемого фотопластинкой

Пластинка подвергается воздействию освещенности $E(x)$

$$E(x) = I(x) - \text{интенсивность колебаний}. \quad (4)$$

Эта пластинка проявляется, затем освещается параллельным пучком, перпендикулярным ее поверхности и имеющим амплитуду, равную единице.

Вспомним, что плотность почернения пластинки определяется как

$$D = \gamma \ln E. \quad (5)$$

С другой стороны, имеем

$$D = \ln \frac{I_{\text{падающего света}}}{I_{\text{пропущенного света}}} = \ln \frac{1}{T} = \ln \frac{1}{t^2}, \quad (6)$$

где T — коэффициент пропускания, а t — амплитуда света, пропускаемого голограммой.

Приравнявая (5) и (6), находим

$$t(x) = I(x)^{-\gamma/2}. \quad (7)$$

Если интенсивность опорного пучка много больше интенсивности пучка, проходящего через объект, то имеем условие

$$A_0 \gg A(x), \quad (8)$$

которое позволяет преобразовать выражение для функции $t(x)$:

$$\begin{aligned} t(x) = I(x)^{-\gamma/2} &= \{A_0^2 + A^2(x) + 2A_0A(x) \cos[\Phi_0(x) + \Phi(x)]\}^{-\gamma/2} = \\ &= A^{2-(\gamma/2)} - \frac{\gamma}{2} A_0^{-\gamma-2} A^2(x) - \gamma A_0^{-\gamma-1} A(x) \cos[\Phi_0(x) + \Phi(x)] = \\ &= A^{1-(\gamma/2)} \left\{ A_0^2 - \frac{\gamma}{2} A^2(x) - \gamma A_0 A(x) \cos[\Phi_0 + \Phi] \right\}. \end{aligned}$$

Разделив выражение для $t(x)$ на постоянный множитель $-2A_0^{-\gamma-2}$, находим

$$t(x) \approx -2A_0^2 + \gamma A^2(x) + \gamma A_0 A(x) e^{j(\Phi_0 + \Phi)} + \gamma A_0 A(x) e^{-j(\Phi_0 + \Phi)}. \quad (9)$$

Тогда это уравнение можно записать

$$\begin{aligned} t(x) = -2A_0^2 + \gamma A^2(x) + \gamma A_0 e^{j\Phi_0} \cdot A(x) e^{j\Phi(x)} + \\ + \gamma A_0 e^{-j\Phi_0} \cdot A(x) e^{-j\Phi(x)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Примечание. Коэффициент γ для фотопластинки содержится в последних трех членах (10). Амплитуда волны Σ , а именно $A(x) e^{j\Phi(x)}$, содержится непосредственно в трех членах. Регистрация голограммы может быть в принципе произведена с любым когерентным источником, однако отношение $A_0/A(x)$ очень велико, поэтому необходимо использовать лазер, чтобы величина $A(x)$ не была слишком мала.

III. Восстановление формы объекта

Восстановление осуществляется легко и может быть проведено без оптической системы.

Голограмма на пластинке освещается плоской когерентной волной σ_0 , фронт которой параллелен пластинке (фиг. 38.3). Распределение амплитуды в плоскости пластинки определяется функцией $t(x)$, и нам нужно знать преобразование Фурье для амплитуды.

Четыре члена функции $t(x)$ соответствуют следующим пространственным частотам:

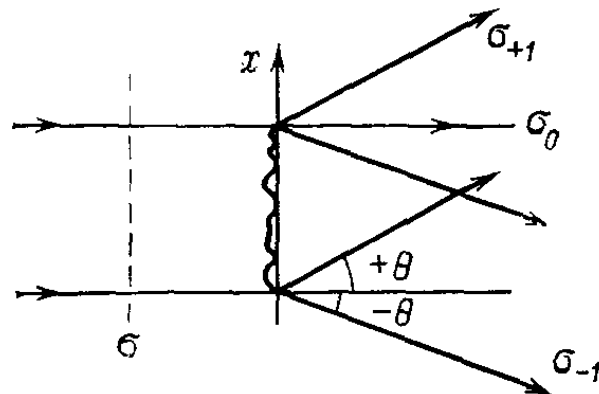
$$\begin{aligned} -2A_0^2 + \gamma A^2(x) &\rightarrow \text{частота } 0, \\ \gamma A_0 A(x) e^{i\Phi(x)} &\rightarrow \text{частота } +u_0 = +\frac{\theta}{\lambda}, \\ \gamma A_0 A(x) e^{-i\Phi(x)} &\rightarrow \text{частота } -u_0 = -\frac{\theta}{\lambda}. \end{aligned} \quad (11)$$

Результаты представлены на фиг. 38.3. Имеем

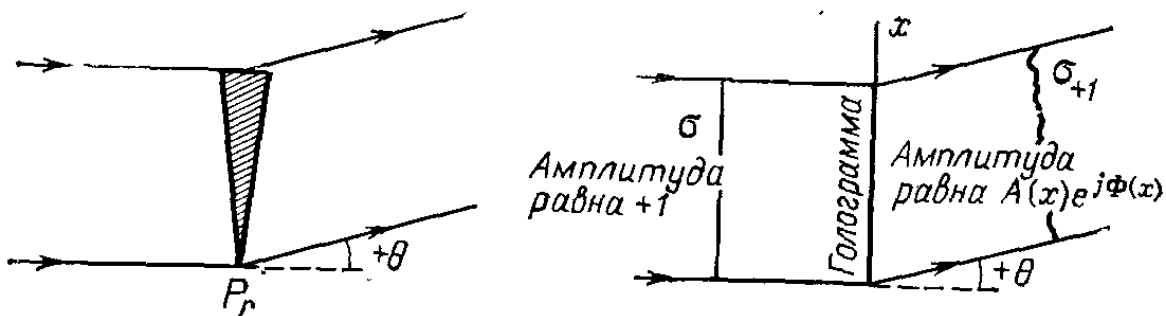
прямую волну σ_0 с амплитудой $-2A_0^2 + \gamma A^2(x)$, распространяющуюся под углом $\theta = 0$;
волну σ_{+1} , образующую угол $+\theta$ с осью Ox и воспроизводящую волну Σ с точностью до коэффициента γA_0 ;
волну σ_{-1} , имеющую такую же амплитуду, как и волна σ_{+1} , но противоположную фазу (распространяется под углом $-\theta$).

Чтобы понять, как голограмма воздействует на плоскую волну σ , вспомним, что призма, «перевернутая вершиной вниз» с

Фиг. 38.3



углом α , поворачивает пучок на угол θ и вносит сдвиг фазы $+(2\pi/\lambda)\theta x$ (фиг. 38.4). Тогда третий член в (10) можно интер



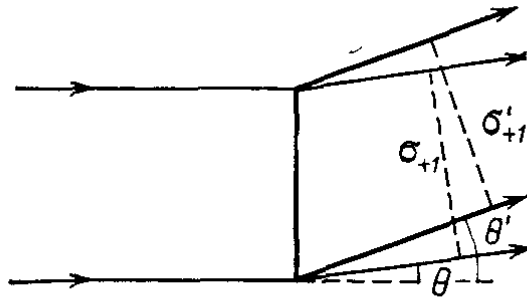
Фиг. 38.4

претировать как амплитуду света, идущего от объекта и пропускаемого упомянутой выше призмой.

Прямой пучок света, распространяющийся под углом $\theta = 0$, является очень ярким, в то время как пучок света, дифрагиро-

вавший под углом $+\theta$, сильно ослаблен и восстанавливает форму объекта.

Увеличение. Если голограмма освещается светом с длиной волны λ' , отличающейся от длины волны λ , используемой для



Фиг. 38.5

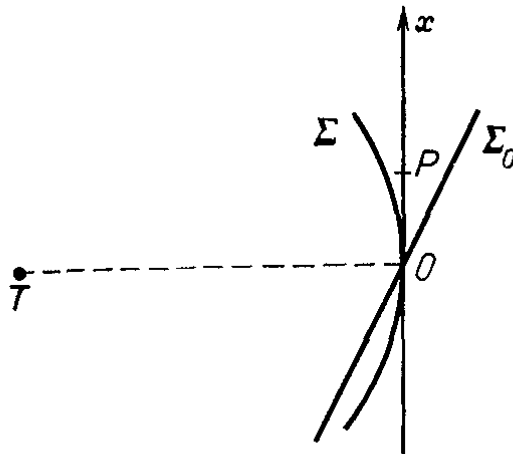
получения голограммы, то волны σ_{+1} и σ_{-1} распространяются под такими углами $+\theta'$ и $-\theta'$, что

$$\frac{\theta}{\lambda} = \frac{\theta'}{\lambda'} \quad (\text{из теории решеток}). \quad (12)$$

Видно (фиг. 38.5), что размеры объекта изменяются непосредственно с длиной волны.

IV. Голографические линзы

Осуществляется интерференция плоской волны Σ_0 со сферической волной Σ (фиг. 38.6).



Фиг. 38.6

1. а) Результирующая амплитуда в точке P равна

$$A_0 e^{-i\Phi_0(x)} + A e^{i\Phi(x)}. \quad (13)$$

Считаем, что $A(x) = A = \text{const}$; эта функция не изменяется при прохождении волны от центра O до конца поля. $\Phi(x)$ — разность фаз между волной Σ с центром в точке T и плоскостью Ox (см., например, задачу о кольцах Ньютона):

$$\Phi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2}{2r} = \frac{\pi}{\lambda f} x^2. \quad (14)$$

Подставляя это значение $\Phi(x)$ в уравнение общего вида (3), находим

$$I(x) = A_0^2 + A^2 + 2A_0A \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[\theta x + \frac{x^2}{2f} \right]. \quad (15)$$

б) Амплитуда света, пропущенного голограммой при освещении когерентной плоской волной, равна

$$t(x) = -2A_0^2 + \gamma A^2 + \gamma A_0 \exp \left(j \frac{2\pi}{\lambda} \theta x \right) A \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda f} x^2 \right) + \\ + \gamma A_0 \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \theta x \right) A \exp \left(-j \frac{\pi}{\lambda f} x^2 \right). \quad (16)$$

Обратите внимание на выражение для функции $t(x)$:

первый и второй члены: голограмма пропускает невозмущенную плоскую волну σ_0 с амплитудой $-2A_0^2 + \gamma A$ под углом $\theta = 0$;

третий член: голограмма ведет себя как перевернутая призма (отклоняющая волну под углом $+\theta$) подобно рассеивающей линзе с фокусным расстоянием $-f$ [преобразующей плоскую волну в расходящуюся волну (фиг. 38.7)]; σ_{+1} — расходящаяся волна, восстанавливающая форму объекта;

четвертый член: в этом случае имеется эквивалент призмы «с вершиной вверх» или фокусирующей линзы с фокусным расстоянием f (фиг. 38.7, б); σ_{-1} — сходящаяся волна. Окончательные изображения показаны на фиг. 38.8.

2. а) Результирующая амплитуда на пластинке равна

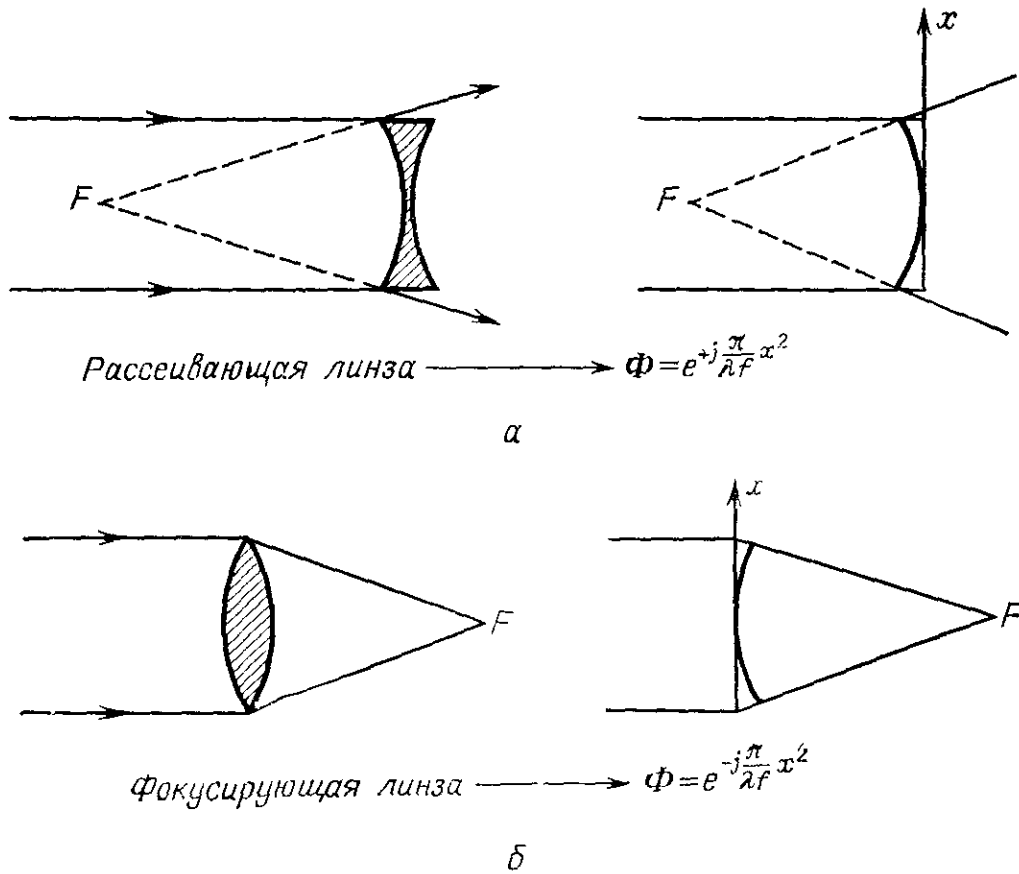
$$A_0 \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \theta x \right) + A \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x - d)^2 \right] + A \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x + d)^2 \right]. \quad (17)$$

б) Выводим выражение для амплитуды света, пропущенного голограммой:

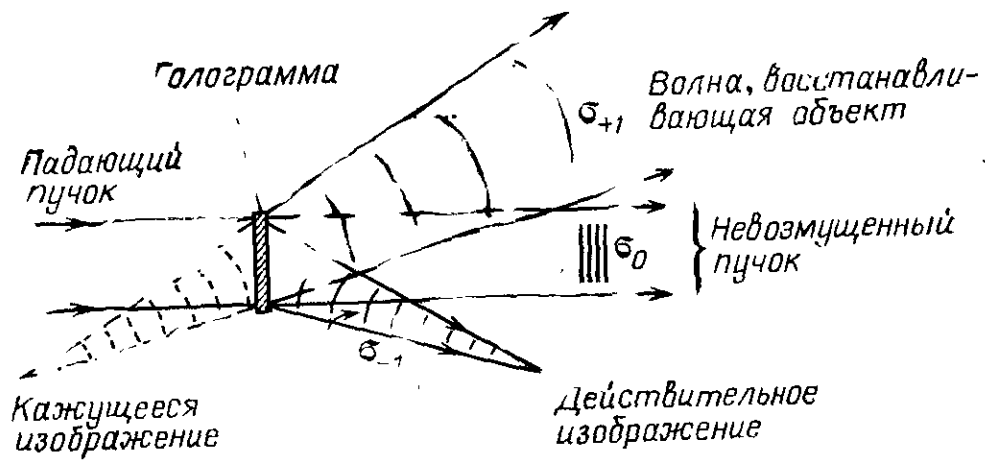
$$t(x) \approx 2A_0^2 - 2\gamma A^2 \left[1 - \cos \frac{4\pi}{\lambda f} dx \right] + \\ + \gamma A_0 A \left\{ \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x - d)^2 \right] + \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x + d)^2 \right] \right\} \exp \left(j \frac{2\pi}{\lambda} \theta x \right) + \\ + \gamma A_0 A \left\{ \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x - d)^2 \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x + d)^2 \right] \right\} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \theta x \right). \quad (18)$$

Имеем

волну, распространяющуюся под углом $\theta = 0$,
две расходящиеся волны под углом $+\theta$,
две сходящиеся волны под углом $-\theta$, которые образуют
действительные изображения T'_1 и T'_2 объектов T_1 и T_2 .



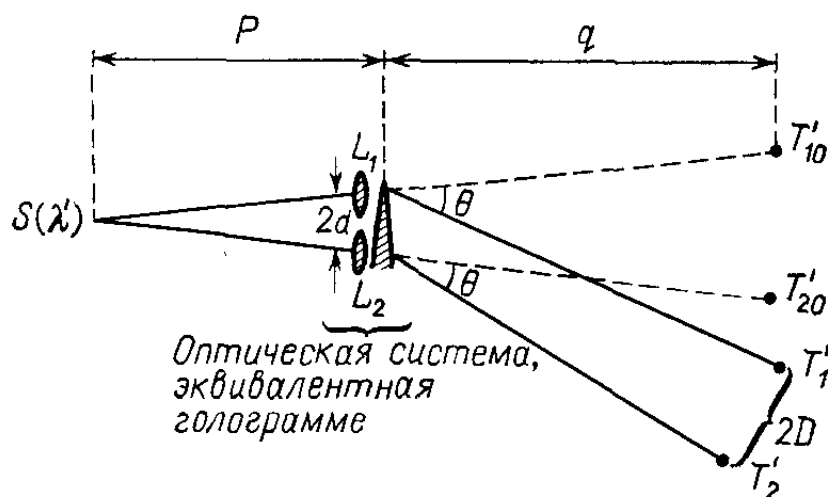
Фиг. 38.7



Фиг. 38.8

Для простоты рассмотрим только эти два изображения. Два последних члена в (18) показывают, что T'_1 и T'_2 получаются сравнением голограммы

с призмой «вершиной вверх»,
с двумя фокусирующими линзами с фокусным расстоянием f для длины волны λ ; их центры разделены расстоянием $2d$ (это расстояние преувеличено на фиг. 38.9).



Фиг. 38.9

Две линзы, пропускающие длину волны λ' , имеют такое фокусное расстояние f' , что

$$f\lambda = f'\lambda'. \quad (19)$$

Уравнение для линз позволяет определить положения точек T'_{10} и T'_{20} . Находим

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq}. \quad (20)$$

Используя треугольники SL_1L_2 и $ST'_{10}T'_{20}$, можно написать

$$g = \frac{2D}{2d} = \frac{p+q}{p} = \frac{q}{f'} = \frac{q}{f} \frac{\lambda'}{\lambda}. \quad (21)$$

Если пластинка подвергается воздействию рентгеновских лучей, а голограмма освещается светом лазера с длиной волны $6328 \text{ \AA}$, то получается очень значительное увеличение. Однако необходимо помнить, что фотопластинка имеет конечное разрешение.

V. Синусоидальная решетка

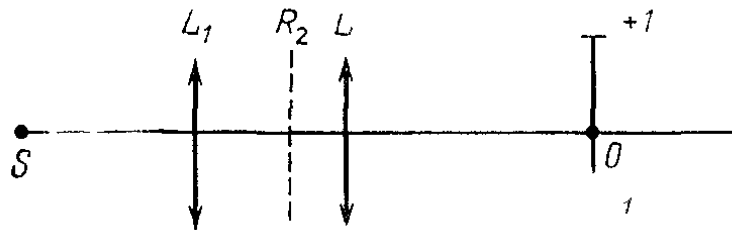
Имеем

$$I(x) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \theta x. \quad (22)$$

Если $A_1 \gg A_2$, то проявленная пластинка пропускает амплитуду

$$t(x) = -2A_1^2 + \gamma A_2^2 + \gamma A_1 A_2 \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \theta x\right) + \gamma A_1 A_2 \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda} \theta x\right). \quad (23)$$

Эта синусоидальная решетка позволяет пройти только пространственным частотам 0, $+u_0$ и $-u_0$. Кроме центрального изображения, имеются спектры порядков $+1$ и -1 , где дисперсия



Фиг. 38.10

пропорциональна длине волны (фиг. 38.10). Эта спектрограмма не содержит спектров выше первого порядка. К сожалению, зернистость фотопластинки снижает разрешение.

ЗАДАЧА 39

Отражательные решетки

I

Рассмотрим отражающий дифракционный зрачок шириной a и высотой $h \gg a$, освещаемый параллельным монохроматическим пучком света.

Падающие лучи нормальны к большей стороне h зрачка. Пусть i — угол падения, а i' — угол дифракции лучей относительно нормали к h , которая будет основным параметром этой задачи. Определите выражение для интенсивности дифракции на большом расстоянии под углом i и определите знаки углов i и i' .

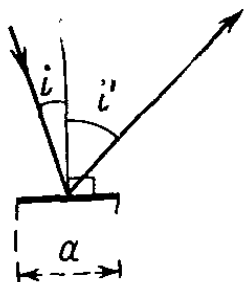
II

Рассмотрим ряд из N зрачков шириной a и N зрачков шириной b , освещенных так же, как и в I, но смещенных на e , как указано на фиг. 39.2. Их второй размер всегда $h \gg b$ и $h \gg a$.

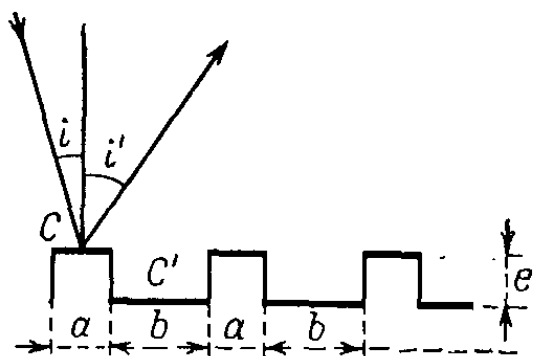
1. Каково запаздывание колебаний, дифрагировавших от центра C' на b , относительно колебаний, дифрагировавших от центра C на a ?

2. Выведите выражение для интенсивности дифрагированного света в случае ряда зрачков a и b .

Считайте, что углы i и i' достаточно малы для того, чтобы падающий и дифрагированный пучки разделились заметным образом.



Фиг. 39.1

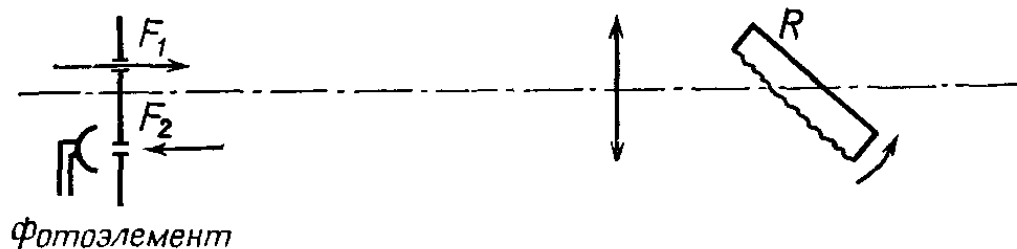


Фиг. 39.2

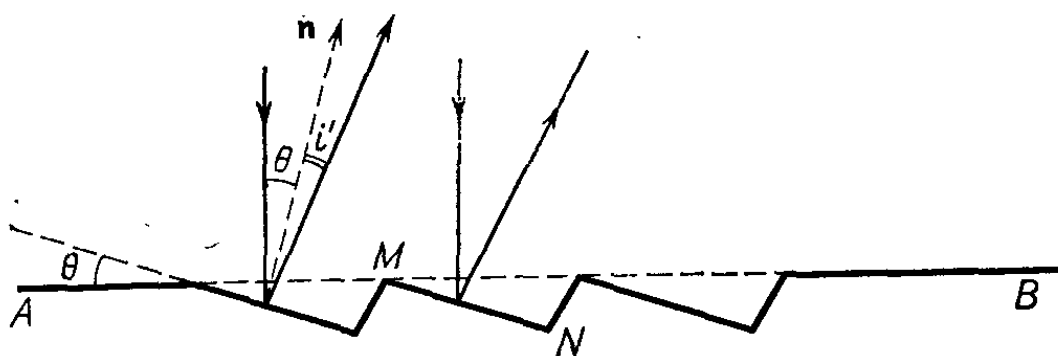
3. Этот ряд из N зрачков (N велико) образует отражательную решетку. Покажите, что соответствующий выбор величины e позволяет устранить спектры некоторых порядков. Примите $a = b$, $i = 0$.

III. Ступенчатая решетка (эшелет)

Установка (фиг. 39.3) используется как ступенчатая решетка. Штрихи на решетке имеют вид, изображенный на фиг. 39.4.



Фиг. 39.3



Фиг. 39.4

На металлическую поверхность AB наносятся штрихи с пилообразным профилем. Поверхность MN каждой ступеньки образует угол θ с направлением AB и имеет ширину $MN = a$.

1. Объясните ход лучей на фиг. 39.4.

2. Падающие лучи нормальны к поверхности AB .

а) Напишите выражение для зависимости интенсивности света, дифрагировавшего под углом i' , от $\sin i'$ для ступеньки шириной a .

б) Определите интенсивность дифракции в этом направлении для N ступенек.

3. Каким должно быть минимальное значение угла θ , чтобы энергия света, дифрагировавшего от решетки, концентрировалась в особом спектре вблизи $\lambda = 1$ мкм? Каков будет порядок этого спектра? $MN = a = 4$ мкм.

РЕШЕНИЕ

I

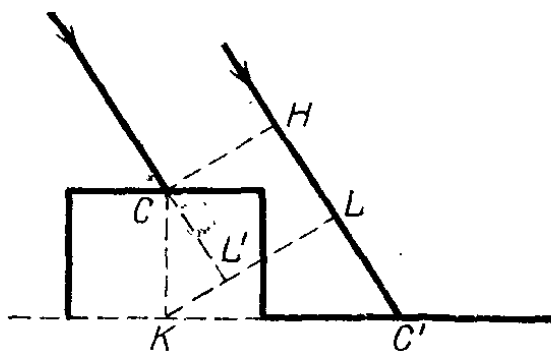
Амплитуда света, дифрагированного зрачком шириной a , равна

$$F_0(u) = a \frac{\sin \pi u a}{\pi u a}, \quad (1)$$

если принять

$$u = \frac{\sin i + \sin i'}{\lambda}. \quad (2)$$

Удобно считать началом отсчета углов нормаль к зрачку, а для



Фиг. 39.5

положительного и отрицательного углов взять обычное тригонометрическое направление.

II. Амплитуда света, дифрагированного ступенькой

1. Между падающими лучами, которые отражаются в точках C и C' (фиг. 39.5), находим разность хода

$$\delta_i = C'H = C'L + LH = C'K \sin i + e \cos i.$$

Так как угол i мал,

$$\delta_i = \frac{p^2}{2} \sin i + e, \quad \text{причем } p = a + b.$$

Между лучами, отраженными в точках C и C' , имеется разность хода

$$\delta = \frac{p}{2} [\sin i + \sin i'] + 2e,$$

отсюда

$$\varphi = \pi r i + \frac{4\pi}{\lambda} e. \quad (3)$$

2. Амплитуда дифрагированного света для ступеньки шириной p равна

$$F_1(u) = a \frac{\sin \pi u a}{\pi u a} + b \frac{\sin \pi u b}{\pi u b} e^{i\varphi}, \quad (4)$$

отсюда интенсивность равна

$$I_1(u) = |F_1(u)|^2.$$

3. Амплитуда дифрагированного света для решетки с N идентичными ступеньками есть

$$F(u) = F_1(u) [1 + e^{i\Phi} + \dots + e^{i(N-1)\Phi}],$$

откуда

$$I(u) = [F_1(u)]^2 \frac{\sin^2 N\Phi/2}{\sin^2 \Phi/2}, \quad (5)$$

где

$$\Phi = 2\pi i r. \quad (6)$$

Если $a = b = p/2$ то уравнение (4) упрощается к

$$F_1(u) = a \frac{\sin \pi u a}{\pi u a} [1 + e^{i\varphi}] = 2ae^{i\varphi/2} \frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (6')$$

откуда

$$I(u) = p^2 \left(\frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \right)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \frac{\sin^2 N\Phi/2}{\sin^2 \Phi/2},$$

$$I(u) = 4a^2 \left(\frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \right)^2 \cos^2 \left[\pi u a + \frac{2\pi e}{\lambda} \right] \left(\frac{\sin N2\pi u a}{\sin 2\pi u a} \right)^2. \quad (7)$$

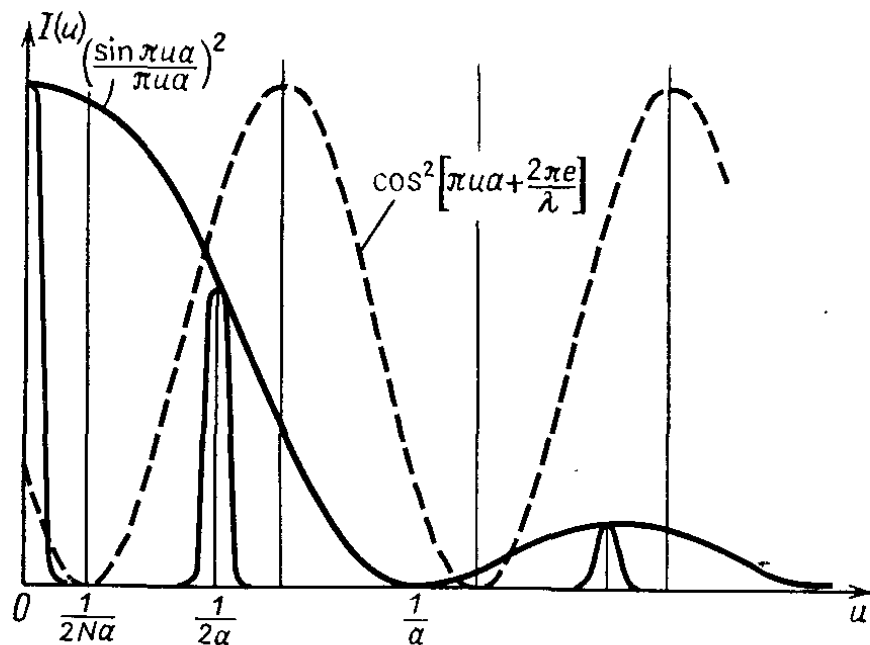
Окончательно можно написать

$$I(u) = \underbrace{4a^2 \left(\frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \right)^2}_{\text{I}} \underbrace{\left(\frac{\sin N2\pi u a}{\sin 2\pi u a} \right)^2 \cos^2 \left[\pi u a + \frac{2\pi e}{\lambda} \right]}_{\text{II}}.$$

Произведение I представляет собой интенсивность дифрагированного света для решетки Фуко с периодом $p = 2a$, имеющую N штрихов (см. задачу 35). Спектры четного порядка (кроме $k = 0$) исчезают. Остаются только спектры порядков $k = 0, \pm 1$,

$\pm 3, \pm 5, \dots$ Изменение I в зависимости от u показано на фиг. 39.6 сплошной линией.

Функция I модулируется членом II, функция $\cos^2(\pi u a + 2\pi e/\lambda)$ имеет период $1/a$, и положения максимумов и минимумов зависят от значения e . Изменения члена II показаны на фиг. 39.6 пунктирными кривыми. В зависимости от положения этой функции некоторые определенные спектры могут исчезнуть.



Фиг. 39.6

а) Если $e = K\lambda/2$ (K — целое число), то член II равен $\cos^2(\pi u a)$. Максимум пунктирной кривой совпадает с нулем. Отражается только спектр нулевого порядка. Спектры нечетного порядка исчезают.

б) Если $e = K\pi/4$ (K — нечетное число), то член II равен $\sin^2(\pi u a)$. Минимум функции находится в начале отсчета. Максимальную интенсивность имеют только оставшиеся спектры нечетного порядка.

III. Ступенчатая решетка (эшелет)

1. Фиг. 39.3.

2. а) Амплитуда света, дифрагировавшего от одной ступеньки, равна

$$F_1(u) = a \frac{\sin \pi u a}{\pi u a}, \quad (8)$$

где

$$u = \frac{1}{\lambda} (\sin \theta + \sin i'), \quad (8')$$

$I = |F_1(u)|^2$ (см. пунктирную кривую на фиг. 39.7).

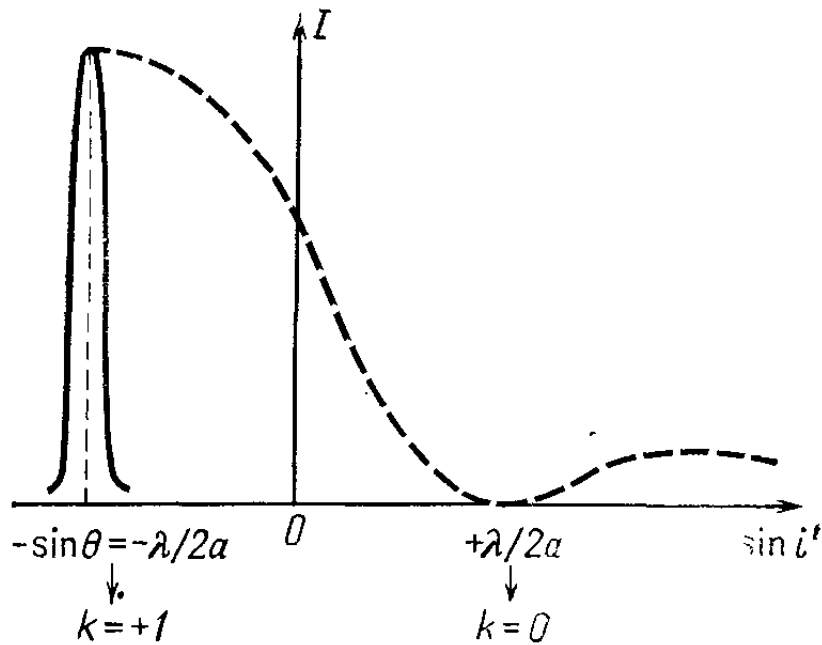
б) Амплитуда света, дифрагировавшего на решетке.

В этом случае потребуется только выражение (5), если принять

$$\Phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{CH} = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{CD} \sin \widehat{CDH} \text{ (см. фиг. 39.8),}$$

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{\cos \theta} \sin(\theta - i'). \quad (9)$$

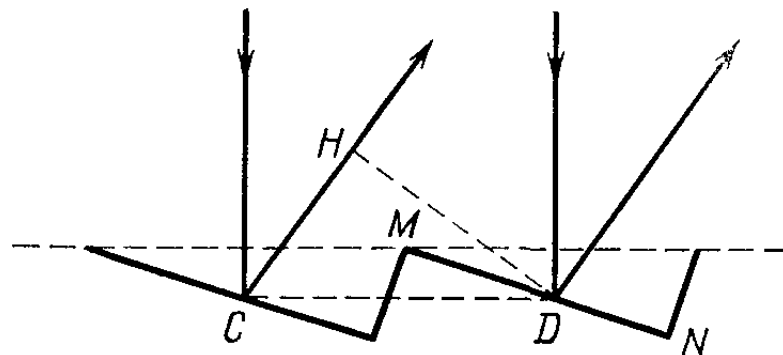
3. Используя уравнение (8), можно видеть, что модуляции, обусловленной дифракцией от одной ступеньки, не возникает,



Фиг. 39.7

если $u = 0$ или $i' = -\theta$. Это соответствует обычному закону отражения.

Фиг. 39.8



Для значения i' , соответствующего главному максимуму,

$$\Phi = 2k\pi$$

или, наконец, используя (9),

$$\frac{a}{\cos \theta} \sin(\theta - i') = k\lambda = \frac{a}{\cos \theta} \sin 2\theta = 2a \sin \theta.$$

Наименьшее значение, разрешенное для угла θ , соответствует $k = 1$, а именно

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2a} = \frac{1}{8} \rightarrow \theta = 7^\circ 24'. \quad (10)$$

Если ступенька прочерчена под углом θ , то наиболее интенсивный спектр соответствует порядку $k = +1$ и дифрагированные лучи направлены под таким углом i' , что

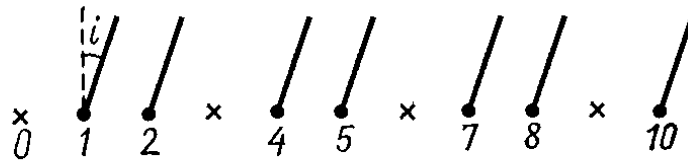
$$\sin i' = -\frac{\lambda}{2a}.$$

Положение других спектров определяется выражением (9), где для угла θ подставляется его значение (10), однако можно видеть, что это положение совпадает с нулевыми минимумами (8). Вся энергия сосредоточивается в спектре порядка $+1$ (фиг. 39.8).

ЗАДАЧА 40

Нерегулярная решетка

Дифракционная решетка Фраунгофера имеет $3N + 1$ штрихов, которые считаются бесконечно тонкими, в результате чего можно считать, что дифракция света происходит одинаково на всех щелях. Закрываем одну щель из трех (включая первую и



Фиг. 40.1

последнюю). Определите условия для максимальной интенсивности и найдите выражение для относительных интенсивностей, когда N становится бесконечным.

РЕШЕНИЕ

I

Пронумеруем щели от 0 до $3N$ (фиг. 40.1). Все амплитуды дифрагированного света одинаковы. Разность фаз от одной щели до другой изменяется на

$$\varphi = \frac{2\pi d \sin i}{\lambda},$$

если взять начало отсчета на щели 0. Нужно определить сумму $\exp(-j\varphi) + \exp(-2j\varphi) + \exp(-4j\varphi) + \exp(-5j\varphi) + \dots$,

которая может быть записана как разность между двумя другими суммами. Первая сумма получается рассмотрением всей решетки:

$$\begin{aligned}\sum_0^{3N} \exp(-jn\varphi) &= \frac{1 - \exp[-j(3N+1)\varphi]}{1 - \exp(-j\varphi)} = \\ &= \frac{\exp[-j(3N+1)\varphi/2]}{\exp(-j\varphi/2)} \frac{\exp[j(3N+1)\varphi/2] - \exp[-j(3N+1)\varphi/2]}{\exp(j\varphi/2) - \exp(-j\varphi/2)} = \\ &= \exp(-j3N) \frac{\varphi}{2} \frac{\sin(3N+1)\varphi/2}{\sin \varphi/2}.\end{aligned}$$

Вторая сумма обусловлена закрытыми щелями:

$$\begin{aligned}\sum_0^{3N} \exp(-j3n\varphi) &= \frac{1 - \exp[-j3(N+1)\varphi]}{1 - \exp(-j3\varphi)} = \\ &= \exp\left(-j3N \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin 3(N+1)\varphi/2}{\sin 3\varphi/2}.\end{aligned}$$

Результирующее колебание определяется соотношением

$$\exp\left(-j3N \frac{\varphi}{2}\right) \left[\frac{\sin(3N+1)\varphi/2}{\sin \varphi/2} - \frac{\sin 3(N+1)\varphi/2}{\sin 3\varphi/2} \right],$$

и интенсивность пропорциональна квадрату выражения в квадратных скобках, которое обозначим через A .

Максимумы получаются для:

а) $\varphi/2 = K\pi$ (K — целое число). Фазы колебаний, исходящих из щелей 1 и 2, различаются на 2π . Все испущенные волны находятся в фазе:

$$\begin{aligned}A &= 3N + 1 - (N + 1) = 2N, \\ I &\sim 4N^2.\end{aligned}$$

б) $\varphi/2 = \{(3K+1)/3\}\pi$. Фазы колебаний, исходящих из щелей 1 и 2, различаются на $2\pi/3$, а из щелей 1 и 4 — на 2π :

$$A = \frac{\sin(3N+1)\pi/3}{\sin \pi/3} - \frac{\sin(N+1)\pi}{\sin \pi}.$$

Во втором члене заменим π на $\pi - \varepsilon$:

$$B = \frac{\sin[(N+1)(\pi - \varepsilon)]}{\sin(\pi - \varepsilon)} = \frac{\sin[(N+1)\pi - (N+1)\varepsilon]}{\sin \varepsilon}.$$

Устремим ε к нулю:

если N четное число, то $B \rightarrow N+1$, $A = 1 - (N+1) = -N$,

если N нечетное число, то $B \rightarrow -(N+1)$, $A = -1 \pm N \pm 1 = N$.

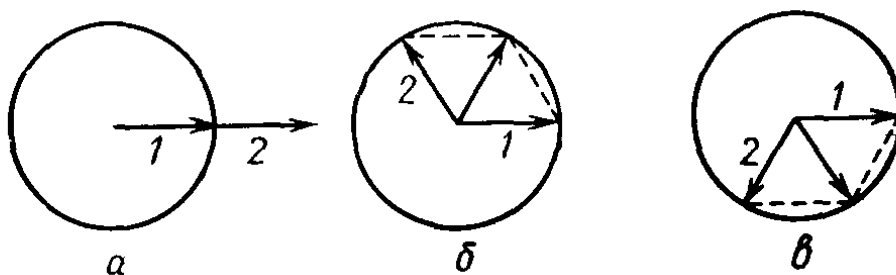
Во втором случае $I \sim N^2$.

в) $\varphi/2 = \{(3K + 2)/3\}\pi$. Фазы колебаний, исходящих от щелей 1 и 2, различаются на $4\pi/3$, а фазы из щелей 1 и 4 — на 4π .

Рассуждая, как в п. б, покажем, что

$$I \sim N^2.$$

На фиг. 40.2 изображены результирующие значения амплитуды для колебаний света, исходящего из щелей 1 и 2 в случаях а, б и в.



Фиг. 40.2

Набор щелей 1 и 2 образует «базис» периодической решетки, которая полностью получается за счет ряда трансляций на $3d$. Эта задача дает простую модель, которая полезна при анализе кристаллических структур, элементарные ячейки которых содержат базис, построенный из нескольких атомов.

II

Эти результаты сразу получаются при использовании преобразования Фурье.

Мы знаем, что преобразование Фурье для разложения Дирака в ряд с периодом p есть разложение Дирака в ряд с периодом $1/p$ (приложение А).

Рассмотрим последовательно решетку с периодом p и решетку с периодом $3p$. Амплитуды дифрагированного света изображаются на фиг. 40.3 и фиг. 40.4 соответственно.

Амплитуда света пропорциональна поверхности зрачка; таким образом, в данном случае она пропорциональна числу щелей. Пусть A будет амплитудой света, дифрагировавшего на решетке с частично закрытыми щелями:

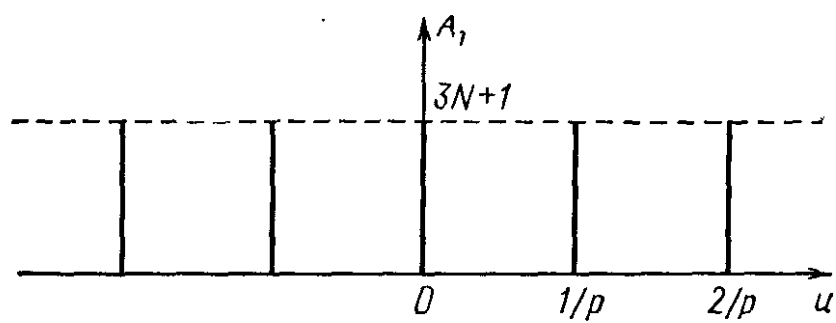
$$A = A_1 - A_2.$$

Значения функции I приведены как ординаты на фиг. 40.5.

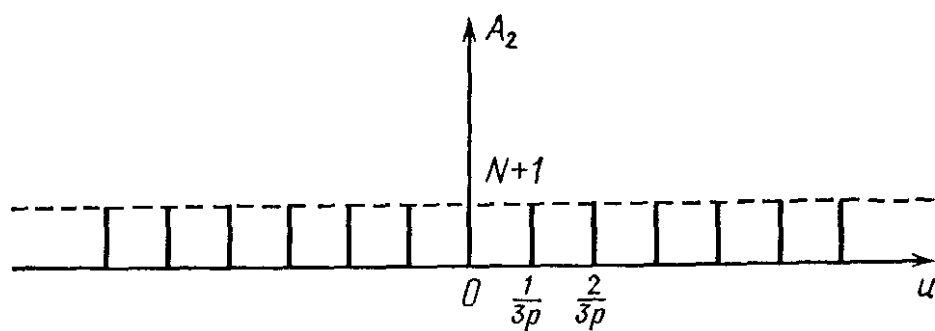
Находим:

$$\text{интенсивность главных максимумов} \sim [(3N + 1) - (N + 1)]^2 = 4N^2,$$

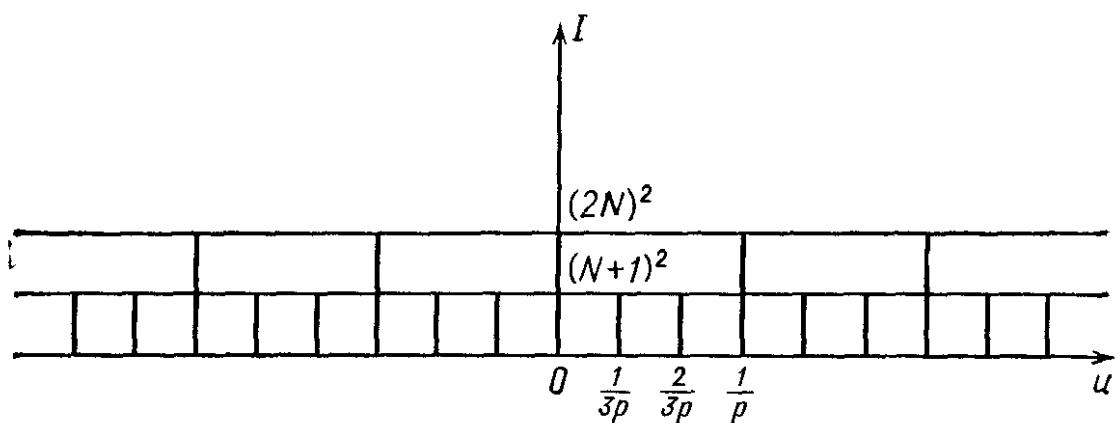
$$\text{интенсивность вторичных максимумов} \sim [N + 1]^2 \approx N^2.$$



Фиг. 40.3



Фиг. 40.4



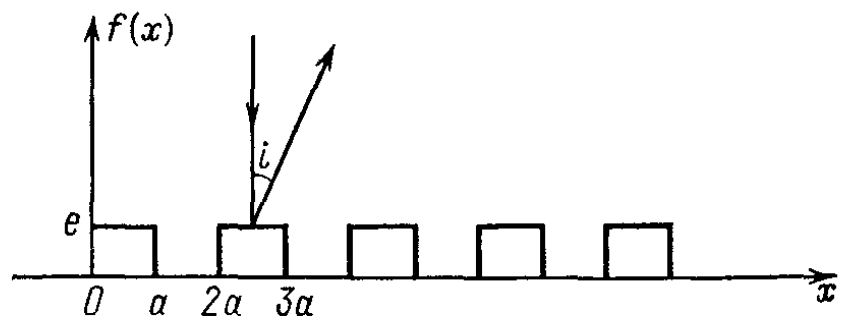
Фиг. 40.5

ЗАДАЧА 41

Фазовая решетка

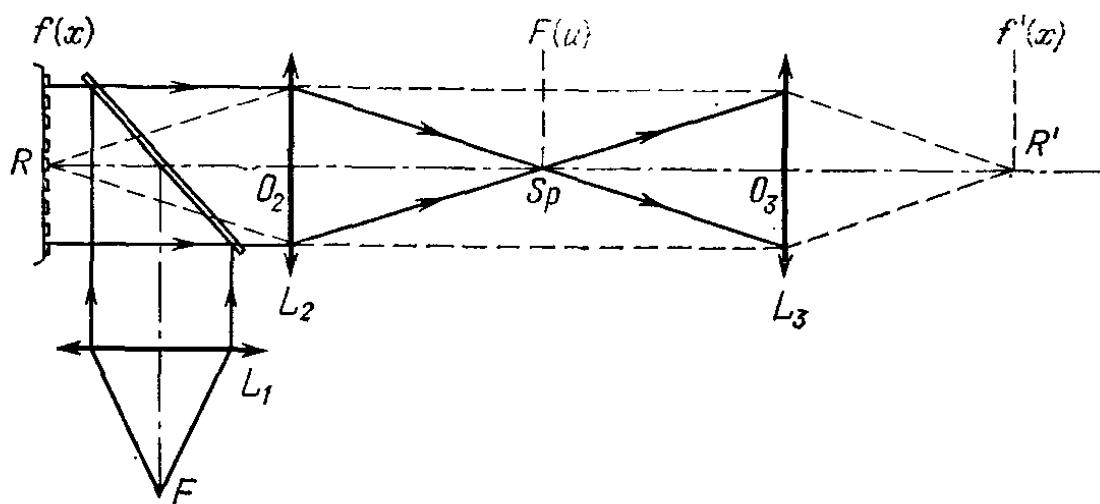
(Рекомендуется сначала решить задачу 39.)

Рассмотрим металлическую поверхность, на которой прочерчены параллельные штрихи шириной a и высотой e . Она образует отражательную решетку с периодом $p = 2a$, профиль которой изображен на фиг. 41.1. Будем считать решетку бесконечно длинной.



Фиг. 41.1

Для наблюдения поверхности решетки используем установку, изображенную на фиг. 41.2. Источник-щель помещается в фокусе F коллиматора L_1 . Эта щель параллельна штрихам решетки



Фиг. 41.2

и перпендикулярна плоскости рисунка. Она испускает монохроматический свет с длиной волны λ . Падающие лучи перпендикулярны поверхности решетки. Дифракционные спектры S_p образуются в фокальной плоскости линзы L_2 . Линзы L_2 и L_3 идентичны. Расстояния RO_2 , O_2S_p , S_pO_3 и O_3R' равны фокусным расстояниям линз L_2 и L_3 . В результате плоскости R и R' являются сопряженными с увеличением, равным единице.

Считайте, что линзы имеют достаточно большую апертуру, чтобы лучи не перекрывались. Применимо преобразование Фурье.

I. Обычное наблюдение

Определите амплитудное распределение на плоскости S_p . Каковы распределения амплитуды и освещенности на плоскости изображения R' ? Определите вид и контрастность изображения. Возьмите в качестве определения контрастности выражение

$$\Gamma = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}}}.$$

Рассмотрите специальный случай, когда $e = \lambda/2$, $\lambda/4$ и величина e мала.

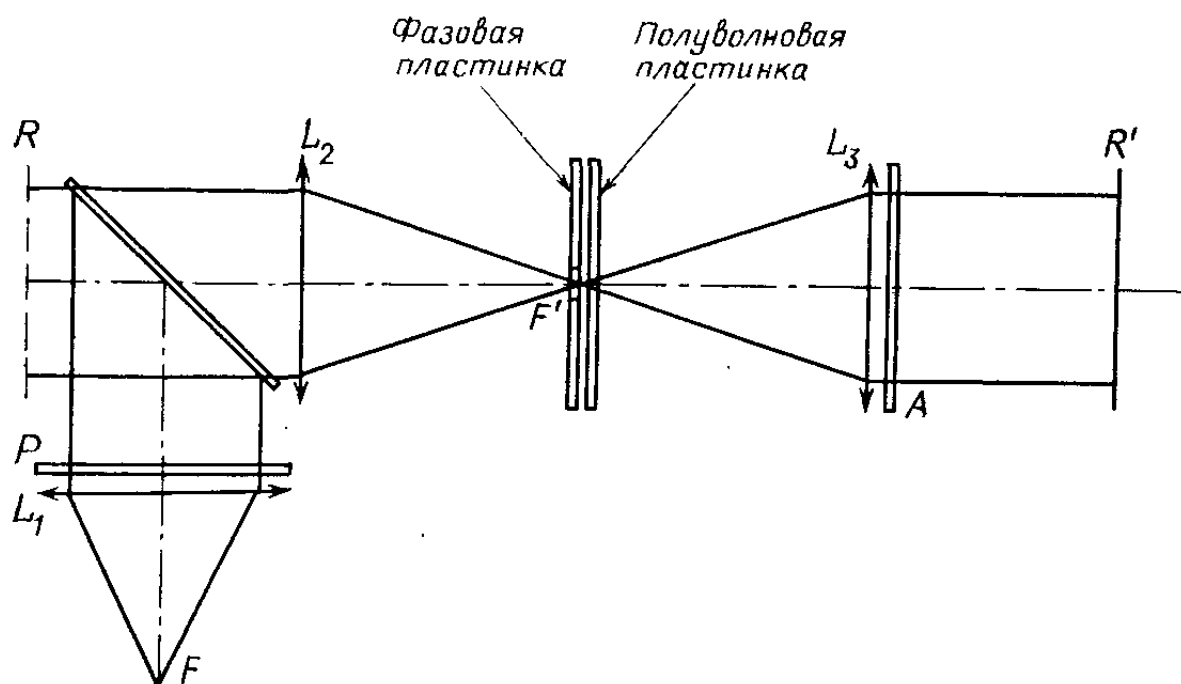
II. Наблюдение фазовой контрастности

Высоты прямоугольников e малы, в результате чего производимый ими фазовый сдвиг очень мал.

В плоскости S_p поместите фазовую пластинку, которая задерживает прямую волну на $\pi/2$. Сравните эти результаты с теми, которые даются в опыте, осуществляемом шлирен-методом.

III

Чтобы повысить чувствительность метода фазовой контрастности, можно уменьшить амплитуду прямой волны до желаемой

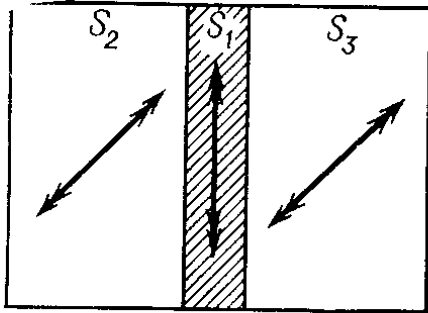


Фиг. 41.3

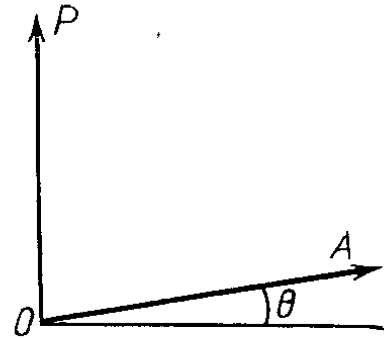
величины. Для этого добавим фазовую пластинку перед двояко-преломляющей пластинкой (фиг. 41.3). Эта пластинка изготовляется следующим образом: из полуволновой пластинки

вырезаются три пластинки S_1 , S_2 и S_3 и пластинка S_1 вводится между S_2 и S_3 (фиг. 41.4).

Пластинка S_1 закрывает изображение F' щели F . «Запаздывающие» оптические оси ориентированы так, как показано на фиг. 41.4. Установлены анализатор A и поляризатор P , который пропускает лишь колебания OP , параллельные штрихам решетки. Колебания, пропущенные анализатором, образуют с OP



Фиг. 41.4 Полуволновая пластинка, вид спереди.
Запаздывающие оси показаны двумя стрелками.



Фиг. 41.5

угол $\pi/2 - \theta$ (θ — переменная величина) (фиг. 41.3 и 41.5). Определите экстремальные значения для интенсивности. Найдите в зависимости от e значение θ , для которого изображение состоит из ярких полос шириной a , разделенных темными полосами той же ширины.

РЕШЕНИЕ

I. Непосредственное наблюдение

1. *Амплитудное распределение в спектрах.* Если использовать выражение (6') из задачи 39, то после нормировки и изменения начала отсчета фаз оно принимает вид

$$F(u) = \frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \frac{\sin 2N\pi u a}{\sin 2\pi u} \cos \left(\pi u a + \frac{2\pi e}{\lambda} \right). \quad (1)$$

Так как $N \rightarrow \infty$, то спектры очень узки. Они разделены промежутком

$$\Delta u = \frac{1}{p} = \frac{1}{2a}. \quad (2)$$

Положения отдельных спектров совпадают с нулями функции

$$\frac{\sin \pi u a}{\pi u a}, \quad \text{где} \quad u = \frac{1}{a}, \quad \frac{2}{a}, \quad \frac{3}{a} \dots$$

Наконец, имеются лишь спектры порядков $0, \pm 1, \pm 3, \pm 5$ и т. д.

Если принять

$$\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda}, \quad (3)$$

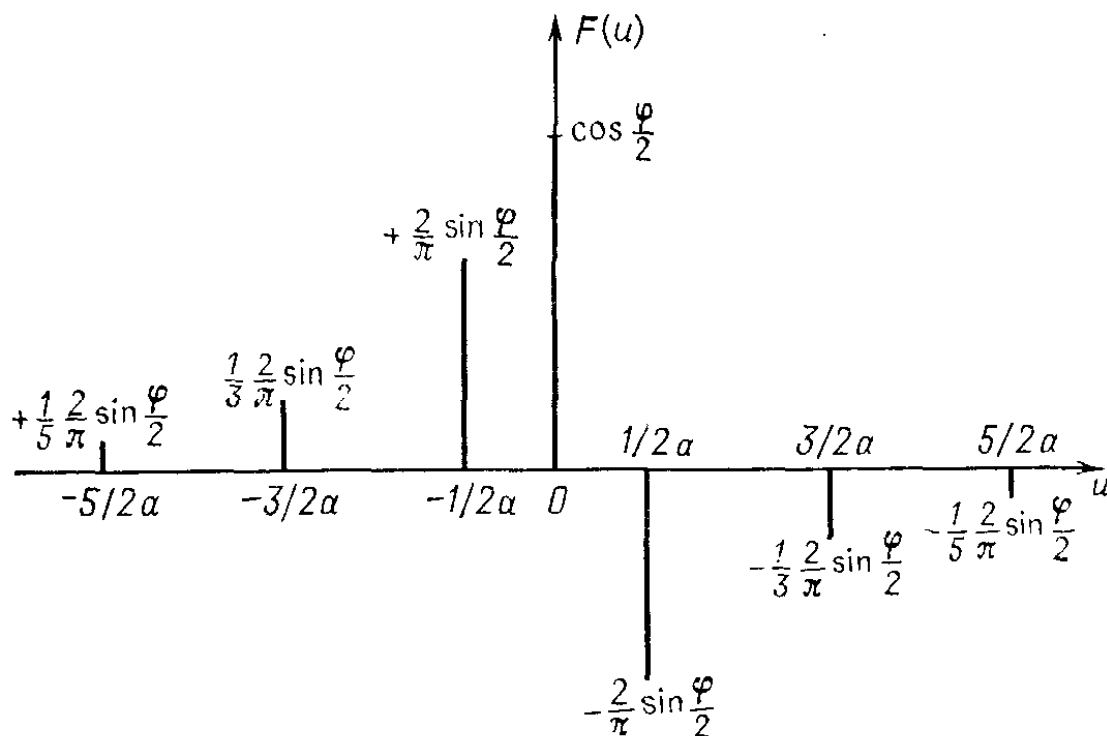
то получаем для амплитуд этих спектров

$$\begin{aligned} F(0) &= \cos \frac{\varphi}{2}, \\ F\left(\pm \frac{1}{2a}\right) &= \mp \frac{2}{\pi} \sin \frac{\varphi}{2}, \\ F\left(\pm \frac{3}{2a}\right) &= \mp \frac{1}{3} \frac{2}{\pi} \sin \frac{\varphi}{2}, \\ F\left(\pm \frac{5}{2a}\right) &= \mp \frac{1}{5} \frac{2}{\pi} \sin \frac{\varphi}{2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

или в более общем виде

$$F(u) = F\left(\pm \frac{K}{2a}\right) \begin{cases} K=0, & F(0) = \cos \frac{\varphi}{2}, \\ K - \text{нечетное число,} & F\left(\frac{K}{2a}\right) = \pm \frac{1}{K} \frac{2}{\pi} \sin \frac{\varphi}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Функция $F(u)$ показана на фиг. 41.6.



Фиг. 41.6

2. Амплитудное распределение в плоскости изображения. Это распределение точно такое же, как и в плоскости объекта, так как спектр пропускается целиком. Из обратного преобразования

Фурье получаем

$$f'(x) = f(x) = \text{F. T. } [F(u)]. \quad (5)$$

Зная, что

$$\delta\left(u - \frac{K}{2a}\right) \xrightarrow{\text{F. T.}} e^{j2\pi(K/2a)x} = e^{jK\pi x/a}, \quad (6)$$

находим

$$f'(x) = f(x) = \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\varphi}{2} \left[(e^{j\pi x/a} - e^{-j\pi x/a}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (e^{j3\pi x/a} - e^{-j3\pi x/a}) + \frac{1}{5} (e^{j5\pi x/a} - e^{-j5\pi x/a}) + \dots \right], \quad (7)$$

$$f'(x) = f(x) = \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{4j}{\pi} \sin \frac{\varphi}{2} \left[\sin \pi \frac{x}{a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sin 3\pi \frac{x}{a} + \frac{1}{5} \sin 5\pi \frac{x}{a} + \dots \right]. \quad (8)$$

3. Распределение освещенности в плоскости изображения (фиг. 41.8):

$$I(x) = |f'(x)|^2 = |f(x)|^2 = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{a} + \dots \right]^2. \quad (9)$$

Так как периодическая функция в квадратных скобках осциллирует между $+\pi/4$ и $-\pi/4$ (фиг. 41.7), находим

$$I_{\text{макс}} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1,$$

$$I_{\text{мин}} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом,

$$\Gamma = \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (10)$$

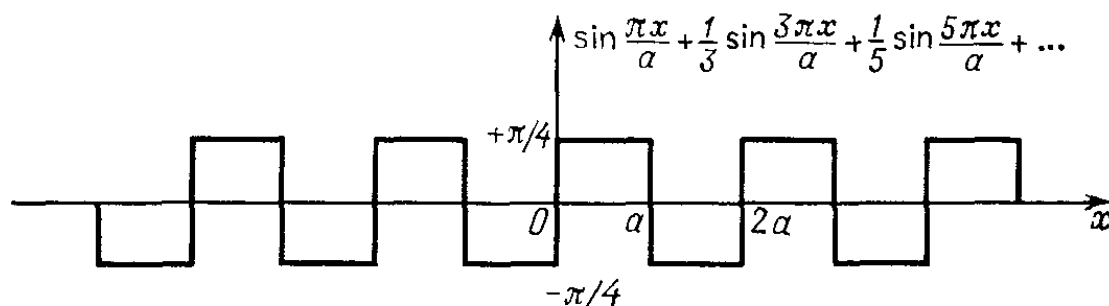
Специальные случаи

Случай $e = \lambda/2$, $\varphi = 2\pi$. В фокальной плоскости линзы L_2 находится только спектр нулевого порядка. Плоскость изображения равномерно освещена ($\Gamma = 0$). Периодическая структура объекта полностью исчезает.

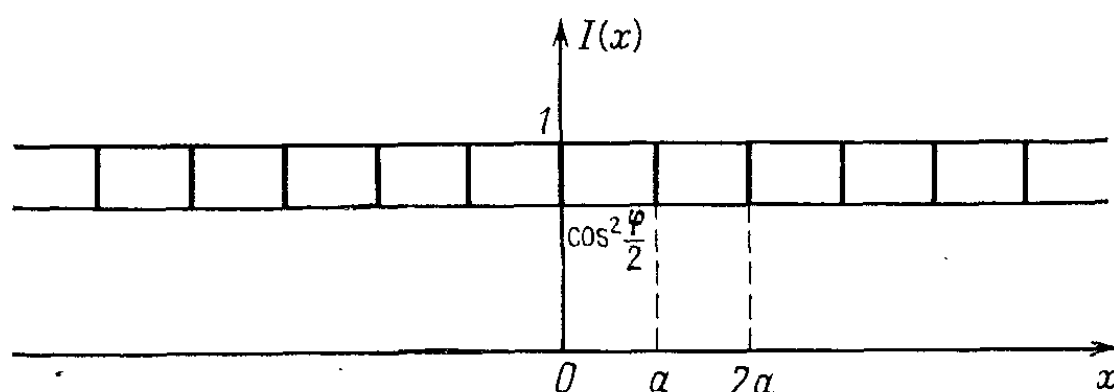
Случай $e = \lambda/4$, $\varphi = \pi$. Обнаруживаем лишь спектры нечетного порядка:

$$f'(x) = -\frac{4j}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \right].$$

Равномерно освещенная плоскость изображения имеет равноотстоящие черные полосы с промежутком a ($\Gamma = 1$). Рельеф решетки различить невозможно.



Фиг. 41.7



Фиг. 41.8

Высота штриха e мала, сдвиг фазы φ мал. Изображение подобно прежнему, но имеет плохую контрастность.

II. Наблюдение фазовой контрастности

Дифрагированная волна имеет опережение на $\pi/2$.

Амплитуда нечетного спектра умножена на $e^{j\pi/2} = +j$.

Учитывая, что сдвиг фазы φ мал, получаем

$$F(u) = F\left(\frac{K}{2a}\right) \times \begin{cases} K=0, & F(0) = \cos \frac{\varphi}{2} = 1, \\ K - \text{нечетное число,} & F\left(\frac{K}{2a}\right) = -j \frac{2}{K\pi} \sin \frac{\varphi}{2} = -\frac{j}{K\pi} \varphi. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, амплитуда в плоскости изображения есть

$$f'(x) = \text{F. T. } [F(u)] = 1 + \frac{2\varphi}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \right] \quad (12)$$

и интенсивность

$$I(x) = [f'(x)]^2 = \left\{ 1 + \frac{2\varphi}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \right] \right\}^2.$$

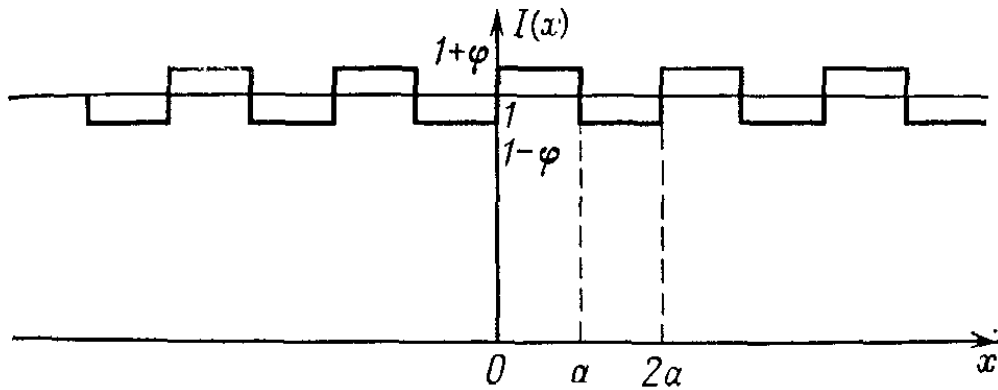
Пренебрегая членами с показателем степени у φ большими, чем 2, можно записать

$$I(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \varphi \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \right], \quad (13)$$

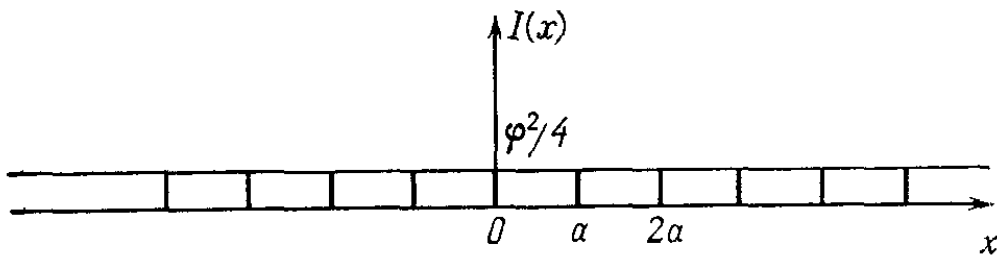
$$I_{\text{макс}} = 1 + \varphi, \quad I_{\text{мин}} = 1 - \varphi, \quad (14)$$

$$\Gamma = \frac{2\varphi}{1 + \varphi}, \quad \text{следовательно,} \quad \Gamma = 2\varphi. \quad (15)$$

Примечания. а) Мы преобразовали фазовые изменения в амплитудные, к которым чувствителен детектор. Рельеф решетки проявляется как изменения в освещенности, но изображение имеет плохую контрастность (пропорциональную сдвигу фазы φ) (фиг. 41.9).



Фиг. 41.9. Фазовая контрастность.



Фиг. 41.10

б) В случае шликрен-фотографии прямая волна получает сдвиг фазы. Тогда амплитуда в плоскости R' равна

$$f'(x) = + \frac{2}{\pi} \varphi \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \right]. \quad (16)$$

Таким образом,

$$I(x) = \frac{4}{\pi^2} \varphi^2 \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \right]^2, \quad (17)$$

$$I_{\text{макс}} = \frac{\varphi^2}{4}, \quad I_{\text{мин}} = 0 \rightarrow \Gamma = 1. \quad (18)$$

Образованное изображение имеет яркие полосы шириной a , разделенные тонкими темными линиями (фиг. 41.10).

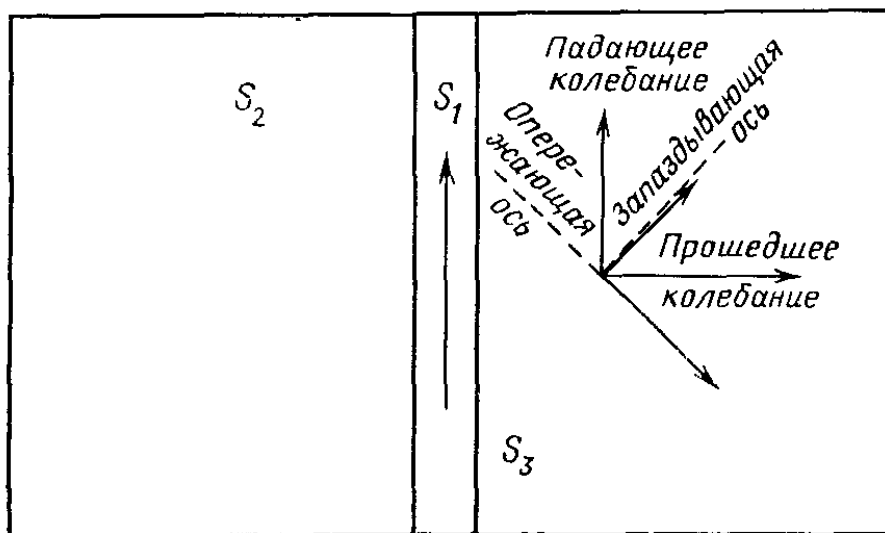
III. Переменная фазовая контрастность (прибор Кастлера — Монтарнала)

Уравнение (11) дает амплитуду спектров после прохождения фазовой пластинки.

Поляризатор P поляризует падающий свет.

Пластинка S_1 не изменяет ориентацию колебания, переносимого прямой волной.

Полуволновые пластинки S_2 и S_3 поворачивают плоскости колебаний нечетных спектров на 90° (фиг. 41.11).



Фиг. 41.11. Направление колебаний после прохождения через полуволновую пластинку.

Прямые и дифрагированные волны всегда находятся под прямым углом, и их колебания взаимно перпендикулярны:

$$F(0) = 1 \quad (\text{колебание параллельно направлению } OP),$$

$$F\left(\frac{K}{2a}\right) = -\frac{j}{K\pi} \varphi \quad (\text{колебание перпендикулярно направлению } OP).$$
(19)

Анализатор пропускает только компоненты колебаний вдоль направления OA , так что

$$F(0) = \sin \theta \quad (\text{колебание параллельно направлению } OA),$$

$$F\left(\frac{K}{2a}\right) = -\frac{j}{K\pi} \varphi \cos \theta \quad (\text{колебание параллельно направлению } OA).$$
(20)

Возьмем преобразование Фурье для амплитудного распределения в плоскости S_p

$$f'(x) = \sin \theta + \frac{2\varphi}{\pi} \cos \theta \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \right]. \quad (21)$$

Отсюда в плоскости изображения R'

$$I(x) = \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \frac{4\varphi}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \right]. \quad (22)$$

Экстремальные значения интенсивности равны

$$\begin{aligned} I_1 &= \sin \theta [\sin \theta + \varphi \cos \theta], \\ I_2 &= \sin \theta [\sin \theta - \varphi \cos \theta]. \end{aligned} \quad (23)$$

$\theta = 0$. Прямая волна не распространяется: $I(x) = \varphi^2/4$.

Это обычная шлирен-фотография.

$\theta > 0$. Если $\varphi > 0$, то имеем функцию $I_1 > I_2$. Фазовое опережение сопровождается увеличением интенсивности. Положительный фазовый контраст. Минимум интенсивности равен нулю, если функция $I_2 = 0$, так что

$$\varphi = \operatorname{tg} \theta \approx \theta = \frac{2\pi}{\lambda} 2e.$$

Таким образом,

$$e = \frac{\lambda \theta}{4\pi}. \quad (24)$$

$\theta < 0$. Обратный эффект, отрицательный фазовый контраст.

ЗАДАЧА 42

Получение и дифракция рентгеновских лучей

I

Нарисуйте и кратко опишите устройство трубки для получения рентгеновских лучей.

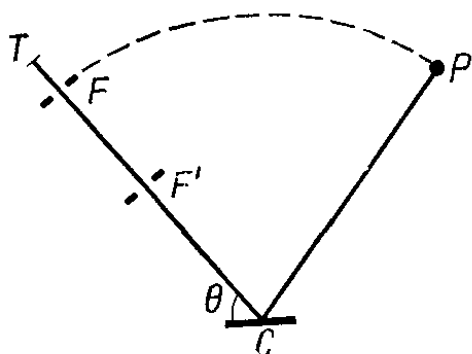
Излучение, выходящее из трубки, имеет непрерывный спектр, на который накладываются интенсивные линии, характерные для материала анода. Укажите источники линейчатого и непрерывного спектров (не принимая во внимание их тонкую структуру).

1. Найдите минимальную длину волны непрерывного спектра, зная, что разность потенциалов, приложенная к трубке, равна 40 кВ.

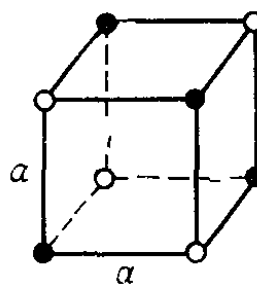
2. Найдите длину волны границы K -спектра поглощения меди для медного анода, у которого ионизационный потенциал электронов самого глубокого уровня (K -оболочка) равен 8,98 кВ. Какую минимальную разность потенциалов надо приложить к трубке, чтобы можно было наблюдать линию, соответствующую переходу между L - и K -оболочками?

II

Требуется выделить линию K_α с длиной волны $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$ с помощью кристаллического монохроматора. Пучок рентгеновских лучей из трубки T коллимируется узкими щелями F и F' (фиг. 42.1) и направляется на поверхность кубика из хлористого натрия. Каково соотношение между длиной волны λ , расстоянием d между кристаллическими плоскостями, параллельными грани кубика и углом θ , образованным лучом с поверхностью кристалла, при селективном отражении пучка с длиной волны λ ?



Фиг. 42.1



Фиг. 42.2

Найдите наименьшее значение θ при условии, что ионы Cl^- и Na^+ расположены в решетке хлористого натрия на расстоянии $a = 2,81 \text{ \AA}$ (фиг. 42.2).

III

Замените кристалл хлористого натрия другим кристаллом, кристаллические плоскости которого удалены друг от друга на неизвестное расстояние d' , которое нужно определить, измеряя угол селективного отражения θ' порядка K для $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$. Угол θ' определяется с точностью до $6'$. При каких значениях θ' достигается наибольшая точность определения d' ? Для какого угла относительная точность будет достигать $1/1000$? Какова наименьшая величина K , которая соответствует наибольшей точности определения d' , приблизительно равной $3,1 \text{ \AA}$?

IV

Покажите, что если удалить щель F' на фиг. 42.1 и вращать кристалл относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка, лучи с длиной волны λ , расходящиеся в точке F , после отражения пройдут через точку P в плоскости рисунка так, что $CF = CP$.

Значения s , h , e заданы.

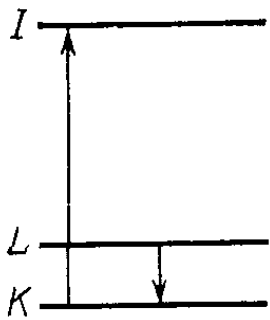
РЕШЕНИЕ

I

1. Непрерывное излучение из рентгеновской трубки вызывается преобразованием кинетической энергии W_k электронов в энергию излучения при их взаимодействии с анодом. Каждый отдельный электрон при прохождении через металл испытывает торможение, излучая при этом фотоны с энергией $h\nu = -\Delta W_k$. Максимальная частота ν_m фотона, которую в этом случае можно получить, соответствует преобразованию полной кинетической энергии электрона в энергию излучения. При $W_k = eV_k$ можно найти

$$\lambda_m = \frac{c}{\nu_m} = \frac{hc}{eV_k} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^4} = 0,31 \cdot 10^{-10} \text{ м (0,31 \AA)}.$$

2. Граница K -поглощения отделяет излучение очень коротких длин волн, которые могут вызывать ионизацию K -оболочки атома, от более длинных волн. Для меди



Фиг. 42.3

$$\lambda_K = \frac{hc}{eV_k} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 8980} = 1,38 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Рентгеновское излучение, соответствующее переходу электрона между различными уровнями L , M , N , ... и уровнем K , может наблюдаться только в том случае, если K -оболочка, которая заполнена у всех атомов, начиная с гелия; теряет при ионизации один из своих двух электронов. В частности, это справедливо для линии K_α ($L \rightarrow K$, фиг. 42.3). Следовательно, разность потенциалов должна достигать $V_k = 8,98 \text{ кВ}$.

II

Искомое выражение — это формула Брэгга

$$2d \sin \theta = K\lambda \quad (K — \text{целое число}). \quad (1)$$

Наименьшее значение θ получается при $K = 1$ и при d , равном минимальному расстоянию между двумя кристаллическими плоскостями хлористого натрия, параллельными стороне куба¹⁾, так что $d = a$, а

$$\sin \theta = \frac{1,54}{5,63} = 0,273, \quad \theta = 15^\circ 50'.$$

¹⁾ Заметьте, что куб на фиг. 42.2 не является базисом решетки NaCl, а соответствует половине трансляции, совмещающей кристаллическую решетку саму с собой.

III

Из соотношения (1) получаем

$$2d' \cos \theta' \cdot \Delta \theta' + 2 \sin \theta' \cdot \Delta d' = 0,$$

$$\left| \frac{\Delta d'}{d'} \right| = \frac{\Delta \theta'}{\operatorname{tg} \theta'}.$$

Наибольшая точность будет достигаться при $\theta' = \pi/2$. При $|\Delta d'/d'| < 10^{-3}$ необходимо, чтобы

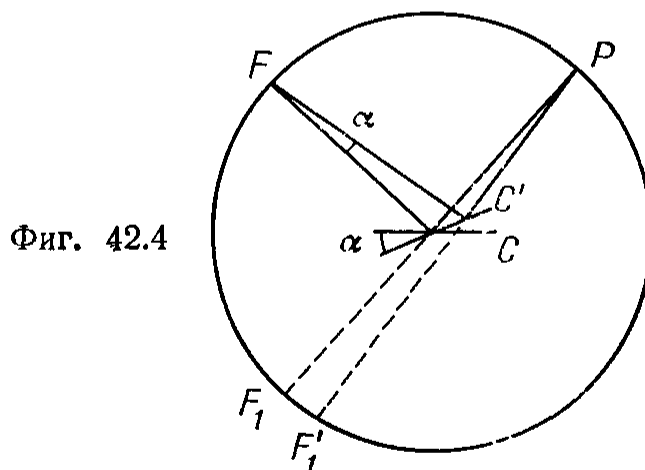
$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 1,8, \quad \theta' = 58^\circ.$$

Минимальное значение θ' равно 58° . При целочисленных значениях K только для $K = 4$ получается $\theta' > 58^\circ$:

$$\sin \theta' = \frac{4 \cdot 1,54}{2 \cdot 3,1} = 0,993.$$

IV

Пусть α есть угол, на который поворачивается отражающая плоскость кристалла (фиг. 42.4), так что луч FC' , исходящий из точки F , падает на эту плоскость под тем же углом θ , что



и луч FC до поворота кристалла. FC' составляет с FC угол α . Пусть P есть точка пересечения отраженного луча FC с окружностью, имеющей центр C и радиус CF . Найдите симметричные положения F_1 и F'_1 точки F по отношению к двум последовательным положениям отражающей плоскости. Дуга $F_1F'_1 = 2\alpha$ и угол $\widehat{F_1PF'_1} = \alpha$. При второй ориентации плоскости отраженный луч соответствует направлению $C'P$.

ЗАДАЧА 43

Рентгеновский спектрометр с изогнутым кристаллом

Вырезанный из кристалла хлористого натрия тонкий параллелепипед, толщина которого вдоль направления OZ мала, под воздействием внешней силы принимает форму цилиндра, в котором плоскости, параллельные вначале XOY , преобразуются в коаксиальные цилиндры с общей осью $R = OC = 1$ м, параллельной OY . При такой деформации можно допустить, что кристаллическая решетка не деформируется, а изменяется только ее ориентация.

1. Покажите, что лучи, отраженные от кристаллических плоскостей, параллельных YOZ до деформации, являются касательными к одной и той же кривой для данного порядка дифракции K . Считайте пластинку бесконечно тонкой.

2. Как изменится предыдущий результат, если пластинка обладает заметной толщиной?

3. Покажите, что лучи, соответствующие порядку дифракции K , практически собираются в фокусе, и найдите его положение.

Где располагаются различные фокусы F_k , получающиеся при $\lambda = 1 \text{ \AA}$? Расстояние между кристаллическими плоскостями, параллельными YOZ , равно $d = 2,8 \text{ \AA}$.

РЕШЕНИЕ

1. Кристаллические плоскости, параллельные вначале плоскости YOZ , а следовательно, и торцам пластинки, отражают только те рентгеновские лучи, которые образуют с нормалью CO угол θ_k , определяемый формулой Брэгга

$$2d \sin \theta_k = K\lambda, \quad (1)$$

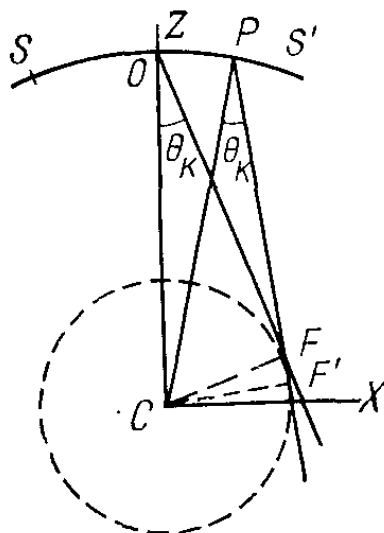
где K — порядок дифракции, d — период решетки кристалла.

Вначале будем считать, что пластинка бесконечно тонка. После того как она сгибается в дугу SS' с центром C (фиг. 43.1), дифракция порядка K , происходящая в какой-либо точке P , приводит к возникновению луча, отраженного под тем же углом θ_k относительно нормали CP к кристаллической плоскости, проходящей через точку P , или, другими словами, относительно радиуса, проведенного из центра C . При перемещении точки P по пластинке расстояние $CP = R$ и угол θ_k остаются фиксированными. Проведем из точки C нормаль CF к лучу, отраженному в точке P . Тогда можно записать, что

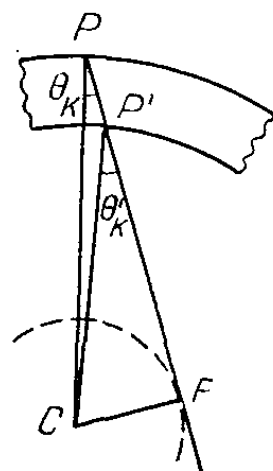
$$CF = R \sin \theta_k = \text{const.} \quad (2)$$

Кроме того, все лучи, отраженные от разных точек на SS' , соответствующие одному и тому же порядку дифракции K , будут касательными к окружности радиусом $R \sin \theta_k$ и с центром в точке C .

2. Рассмотрим пластинку конечной толщины и луч PF , отраженный кристаллической плоскостью в точке P под углом θ_k .



Фиг. 43.1



Фиг. 43.2

Этот луч проходит через точку P' на пластинке и образует угол θ'_k с нормалью к кристаллической плоскости CP' , проходящей через P' (фиг. 43.2). Тогда

$$CP \sin \theta_k = CP' \sin \theta'_k = CF. \quad (3)$$

Из геометрических соображений следует, что

$$\frac{d}{d'} = \frac{CP}{CP'},$$

и соотношение (3) принимает вид

$$d \sin \theta_k = d' \sin \theta'_k,$$

так что направление PF одинаково для лучей, отраженных от любой точки P и удовлетворяет уравнению (1). Таким образом, толщина пластинки не влияет на выводы, сделанные в первой части задачи.

3. Из фиг. 43.1 видно, что если размеры пластинки малы, все отраженные лучи, соответствующие одному порядку дифракции, собираются в фокусе вблизи точки F , координаты которой равны

$$\begin{aligned} x &= CF \cos \theta_k = R \sin \theta_k \cos \theta_k, \\ z &= CF \sin \theta_k = R \sin^2 \theta_k. \end{aligned} \quad (4)$$

Для различных значений K уравнение (1) позволяет найти возможные значения $\sin \theta_k$, а из уравнений (4) можно опреде-

лить координаты соответствующих фокусов F_k . Находим

k	=	1	2	3	4
$\sin \theta_k$	=	0,1786	0,3572	0,5358	0,7144
θ_k	=	$10^\circ 17'$	$20^\circ 56'$	$32^\circ 24'$	$45^\circ 33'$
$\cos \theta_k$	=	0,9839	0,9340	0,8443	0,7003
x_k (в м)	=	0,175	0,333	0,452	0,500
z_k (в м)	=	0,032	0,127	0,287	0,510

При изменении θ_k геометрическое место точек F_k представляет собой окружность, уравнение которой имеет вид

$$x^2 + \left(z - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Ее центр имеет координаты $x_0 = 0$ и $z_0 = R/2$. В этом случае он расположен на середине CO (фиг. 43.1). Окружность проходит через C и касается плоскости в точке O .

ЗАДАЧА 44

Групповая и фазовая скорости

Вычислите групповую скорость U волн, фазовая скорость V которых изменяется следующим образом в зависимости от длины волны:

1. Акустические волны в воздухе: $V = A$, A — константа.
2. Поперечные упругие волны в стержне: $V = A/\lambda$.
3. Глубоководные волны: $V = A\sqrt{\lambda}$.
4. Капиллярные волны: $V = A/\sqrt{\lambda}$.
5. Ионосферные электромагнитные волны: $V = \sqrt{c^2 + A^2\lambda^2}$ (c — скорость света в вакууме).

РЕШЕНИЕ

Групповая скорость синусоидальных волн, каждая из которых характеризуется угловой частотой ω и волновым вектором $\sigma = 2\pi/\lambda$ и угловые частоты которых распределены вблизи среднего значения ω , определяется выражением

$$U = \frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{V}\right)} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}.$$

1. Если V постоянная величина, среда не обладает дисперсией и $dV/d\lambda = 0$, а $U = V$.

$$2. U = \frac{A}{\lambda} + \frac{\lambda A}{\lambda^2} = 2V.$$

$$3. U = A\sqrt{\lambda} - \frac{\lambda A}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{A}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{V}{2}.$$

$$4. U = \frac{A}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\lambda}{2} \frac{A}{\sqrt{\lambda^3}} = \frac{3}{2}V.$$

$$5. U = \sqrt{c^2 + A^2\lambda^2} - \frac{\lambda 2A^2\lambda}{2\sqrt{c^2 + A^2\lambda^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + A^2\lambda^2}} = \frac{c^2}{V}.$$

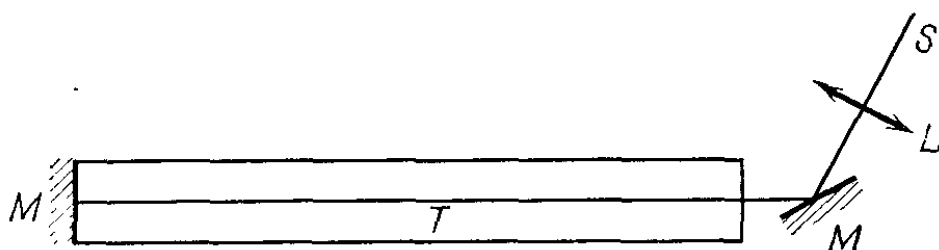
См. также задачи 54 и 56.

ЗАДАЧА 45

Измерение скорости света методом Фуко

I

Измерение скорости электромагнитных волн с использованием стационарных волн позволяет определить фазовую скорость v_{ϕ} . В методе зубчатого колеса Физо, в котором используются очень короткие импульсы, определяется групповая скорость v_g . Покажите, что метод вращающегося зеркала Фуко также дает групповую скорость v_g . При этом надо принять во внимание изменение частоты, происходящее при отражении от



Фиг. 45.1

движущегося зеркала. Покажите, что после отражения от вращающегося зеркала M (фиг. 45.1) волновой фронт, распространяющийся в диспергирующей среде, заполняющей трубку T длиной l , подвергается дополнительному вращению после выхода в воздух и что это вращение добавляется к вращению, первоначально вызываемому зеркалом.

II

Майкельсон, используя этот метод, измерил скорость света в сероуглероде, заполняющем трубку T , и нашел, что она равна $v = c/1,77$. Источник S излучал белый свет. Показатель преломления сероуглерода имеет следующие значения для длин волн в воздухе, измеренных в мкм:

λ_0	0,589	0,550	0,486
n	1,628	1,640	1,652

Покажите, что эти значения находятся в согласии с выводами первого раздела.

РЕШЕНИЕ

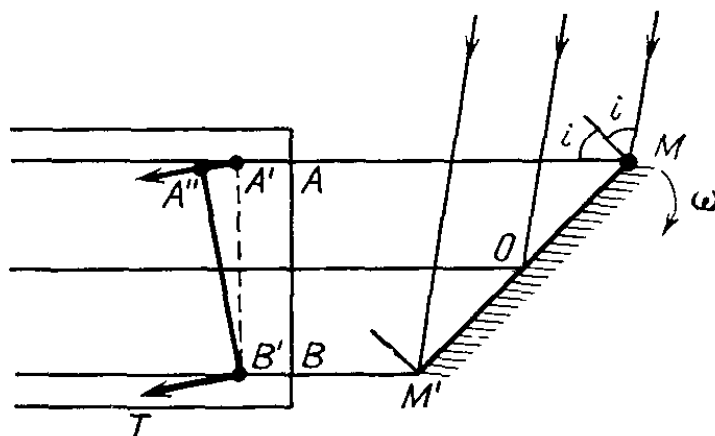
I

После прохождения через линзу L плоская волна, отклоненная при отражении от вращающегося зеркала M , входит в трубку T . Если пренебречь обычно малыми релятивистскими эффектами, перемещение зеркала со скоростью u в направлении, перпендикулярном его плоскости, для излучения с частотой ν , падающего на зеркало под углом i , приводит к такому же результату, какой был бы при перемещении источника со скоростью $2u \cos i$. Таким образом, изменение частоты, обусловленное эффектом Доплера, составляет

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \pm \frac{2u}{c} \cos i.$$

Знак $+$ или $-$ выбирается в зависимости от того, направлено ли движение зеркала навстречу лучу или от луча, падающего на него.

Фиг. 45.2



Учитывая это, допустим, что MM' (фиг. 45.2) — поверхность зеркала, вращающегося вокруг оси O с угловой скоростью ω . Отраженная волна теперь не является монохроматической. Ее частота изменяется от точки M до M' на величину

$$\Delta \nu = \nu \frac{4\omega R \cos i}{c}, \quad (1)$$

если считать, что $MM' = 2R$, и так как $u = \omega R$ в точках M и M' . Волновой фронт, проходящий через отверстие трубки AB при нормальном падении, распространяется в заполняющей трубку дисперсионной среде с фазовой скоростью v_ϕ , являющейся функцией ν :

$$\Delta v_\phi = \frac{dv_\phi}{d\nu} \cdot \Delta \nu, \quad (2)$$

поэтому, используя (1), получаем

$$\Delta v_{\varphi} = \frac{dv_{\varphi}}{dv} \frac{4\omega v R \cos i}{c}. \quad (3)$$

Для сероуглерода, как и для всех прозрачных сред, $dv_{\varphi}/d\lambda$ является отрицательной в видимой области спектра. Следовательно при вращении в указанном на фигуре направлении легко видеть, что скорость v_{φ} волнового фронта в точке A больше, чем в точке B . Волновой фронт распространяется со средней скоростью, которая является фазовой скоростью v_{φ} излучения, падающего в точку O , где частота не изменяется, но он испытывает вращение, угловая скорость которого равна

$$\omega' = \frac{A'A''}{A'B'} = \frac{\Delta v_{\varphi}}{2R \cos i} = - \frac{dv_{\varphi}}{dv} \frac{2\omega v}{c}, \quad (4)$$

причем знак минус обусловлен тем, что направление ω' противоположно направлению ω . Выражение, связывающее групповую скорость v_g с фазовой:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{v_{\varphi}} \right) = \frac{1}{v_{\varphi}} - \frac{v}{v_{\varphi}^2} \frac{dv_{\varphi}}{dv},$$

позволяет записать (4) в виде

$$\omega' = \frac{2\omega}{c} v_{\varphi}^2 \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_{\varphi}} \right).$$

За время $\Delta t = 2l/v_{\varphi}$, необходимое для прямого и обратного прохождения по трубке, фронт волны поворачивается на угол

$$\beta = \omega' \Delta t = \frac{4\omega l}{n} \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_{\varphi}} \right),$$

где $n = c/v_{\varphi}$ — показатель преломления для излучения с частотой ν . При вхождении в воздух волновой фронт, составляющий с поверхностью малый угол β , испытывает преломление, которое преобразует угол β в угол α :

$$\alpha = n\beta = 4\omega l \left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_{\varphi}} \right).$$

Это вращение при повороте отражателя будет происходить в том же направлении, что и вращение зеркала. Последнее, без учета эффекта Доплера, задается выражением

$$\theta = \frac{4\omega l}{v_{\varphi}} \quad (5)$$

для излучения частоты ν . Результирующим вращением будет

$$\alpha + \theta = \frac{4\omega l}{v_g},$$

а не (5). Из него и находится групповая скорость.

II

Согласно сказанному выше, скорость $c/1,77$ является групповой скоростью. Чтобы связать ее с данными, указанными в задаче, необходимо выразить ее через дисперсию $dn/d\lambda_0$ сероуглерода. Имеем

$$v_g = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda},$$

где λ — длина волны в среде. Поскольку

$$n = \frac{c}{v_\varphi}, \quad \frac{dn}{n} = - \frac{dv_\varphi}{v_\varphi},$$

$$v_g = v_\varphi \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Используя $\lambda_0 = \lambda n$, получаем

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\lambda_0}{\lambda_0} - \frac{dn}{n};$$

отсюда

$$\frac{\lambda}{d\lambda} \frac{dn}{n} = \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0} : \left(1 - \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0} \right).$$

Выражение в скобках представляет собой малую поправку. Отсюда окончательно находим

$$v_g = v_\varphi \left(1 + \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0} \right).$$

По условию задачи

$$\frac{dn}{n} = \frac{0,024}{1,640}, \quad \frac{\lambda_0}{d\lambda_0} = \frac{0,55}{0,1031}.$$

Для средней длины волны $v_\varphi = c/1,64$, следовательно,

$$v_g - v_\varphi = \frac{c}{1,64} (-0,077)$$

(отрицательный знак обусловлен тем, что $dn/d\lambda < 0$). Затем получаем

$$v_g - v_\varphi = c \left(\frac{1}{1,77} - \frac{1}{1,64} \right) = \frac{c}{1,64} (-0,073).$$

Совпадение является удовлетворительным.

ЗАДАЧА 46

Скорость света в движущейся воде

Опыт Физо по измерению скорости света в движущейся воде был с большей точностью повторен Зееманом.

Длина каждой трубки l составляет 6 м, а скорость течения воды 5,50 м/с. При температуре опыта показатель преломления воды для зеленой линии ртути ($\lambda_0 = 546$ нм) равен 1,3345. Регистрируется положение центральной полосы для какого-либо направления течения, затем направление течения меняется на обратное и находится новое положение этой же полосы.

1. Найдите наблюдаемое смещение как функцию расстояния между полосами.

2. В этом опыте вода, через которую пропускают свет, движется относительно источника. Следовательно, имеет место эффект Доплера. Рассчитайте новые положения полос, принимая во внимание этот эффект. Можно ли пренебречь этим эффектом, если окажется, что положение полосы может быть определено лишь с точностью до 0,01 расстояния между полосами? Показатель преломления воды для $\lambda_0 = 589$ нм равен 1,3330.

РЕШЕНИЕ

1. Разность времен прохождения света в двух трубках равна

$$\Delta t = \frac{l}{v_{\phi_1}} - \frac{l}{v_{\phi_2}}. \quad (1)$$

Если пренебречь эффектом Доплера, имеем

$$v_{\phi} = \frac{c}{n} \pm u \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2)$$

следовательно,

$$\Delta t = \frac{l}{\frac{c}{n} - u \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)} - \frac{l}{\frac{c}{n} + u \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)} \approx \frac{2lu}{c^2} (n^2 - 1). \quad (3)$$

Смещение, выраженное через расстояние между полосами, равно

$$\Delta p' = \frac{2 \Delta t}{T} = \frac{2c \Delta t}{\lambda_0} = \frac{4lu}{c \lambda_0} (n^2 - 1),$$

$$\Delta p' = \frac{4 \cdot 6 \cdot 5,5}{3 \cdot 10^8 \cdot 546 \cdot 10^{-9}} (1,7809 - 1) = 0,64.$$

2. Излучение с длиной волны λ_0 , испускаемое источником в системе отсчета, связанной с водой, имеет длину волны

$\lambda'_0 = \lambda_0 + \Delta\lambda$. Показатель преломления должен быть найден для λ'_0 . Тогда

$$n' = n + \frac{dn}{d\lambda_0} \Delta\lambda_0$$

и

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \pm \frac{nu}{c}.$$

Знак $+$ относится к трубке, в которой вода движется в направлении от источника. Отсюда

$$n' = n \pm \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \frac{un}{c} = n \left(1 \pm \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \frac{u}{c} \right).$$

Фазовая скорость, определяемая формулой (2), равна

$$v_\phi = \frac{c}{n'} \pm u \left(1 - \frac{1}{n'^2} \right) = \frac{c}{n} \left(1 \mp \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \frac{u}{c} \right) \pm u \left(1 - \frac{1}{n'^2} \right),$$

или

$$v_\phi \approx \frac{c}{n} \pm u \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0} \right),$$

если заменить n'^2 на n^2 и, следовательно, пренебречь членами при u/c . Уравнение (3) принимает вид

$$\Delta t \approx \frac{2lu}{c^2} \left(n^2 - 1 - n\lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \right),$$

и смещение полос равно

$$\Delta p'' = \frac{2lu}{c\lambda_0} \left(n^2 - 1 - n\lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \right) = \Delta p' \left(1 - \frac{n\lambda_0}{n^2 - 1} \frac{dn}{d\lambda_0} \right).$$

Численный пример:

$$\frac{dn}{d\lambda_0} = -\frac{0,0015}{43 \cdot 10^{-9}}, \quad n^2 - 1 = 0,78,$$

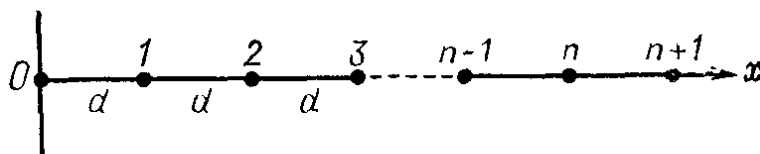
$$\begin{aligned} \Delta p'' &= 0,64 \left(1 + \frac{1,3345 \cdot 456 \cdot 10^{-9} \cdot 0,0015}{0,78 \cdot 43 \cdot 10^{-9}} \right) = \\ &= 0,64 (1 + 0,034) = 0,66 \text{ полосы.} \end{aligned}$$

Таким образом, эффект Доплера необходимо учитывать, как это и сделал Зееман в своем опыте.

ЗАДАЧА 47

Распространение волн в периодической дискретной среде

Рассмотрим продольные упругие волны, распространяющиеся вдоль бесконечной цепочки точечных частиц, имеющих массу m и расположенных вдоль оси Ox с интервалом d . Со стороны каждой из этих частиц действует на соседние частицы отталкивающая сила, пропорциональная изменению их расстояния от положения равновесия (фиг. 47.1).



Фиг. 47.1

1. Найдите уравнение движения для n -й частицы, обозначив ее смещение от положения равновесия через s_n , и покажите, что уравнения движения частиц имеют решение типа

$$s_n = S \cos(\omega t - \sigma n d).$$

Покажите, что угловая частота ω изменяется в зависимости от волнового числа σ и всегда остается меньше некоторой величины ω_m , которую нужно определить.

2. Найдите фазовую скорость синусоидальных волн, которые могут распространяться вдоль этой цепочки частиц и рассмотрите ее изменение как функцию σ . Найдите групповую скорость волн, угловая частота которых близка к заданной величине.

3. При условии, что показатели преломления кристаллов NaCl и KCl имеют следующие значения для двух концов видимого спектра:

NaCl	1,537	1,568
KCl	1,483	1,510

определите число частиц, которое должно приходиться на длину волны, чтобы объяснить дисперсию, обусловленную описанным выше механизмом. Применим ли этот механизм к световым волнам?

РЕШЕНИЕ

1. Уравнение движения n -й частицы

$$m \frac{d^2 s_n}{dt^2} = -k(s_n - s_{n-1}) - k(s_n - s_{n+1}) = k(s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n), \quad (1)$$

где k — коэффициент упругости в законе Гука,

Этому уравнению удовлетворяет продольная волна

$$s(t) = S \exp [j(\omega t - \sigma x)].$$

Определяется смещение только для абсцисс nd ($n = 1, 2, \dots$), соответствующих расположению частиц, следовательно,

$$s_n(t) = S \exp [j(\omega t - \sigma nd)]. \quad (2)$$

Подставляя решение (2) в уравнение (1) после деления на s_n , находим

$$m\omega^2 = -k [\exp(-j\sigma d) + \exp(j\sigma d) - 2] = 4k \sin^2 \frac{\sigma d}{2},$$

откуда

$$\omega = \omega_m \sin \frac{\sigma d}{2} = \omega_m \sin \frac{\pi d}{\lambda}, \quad (3)$$

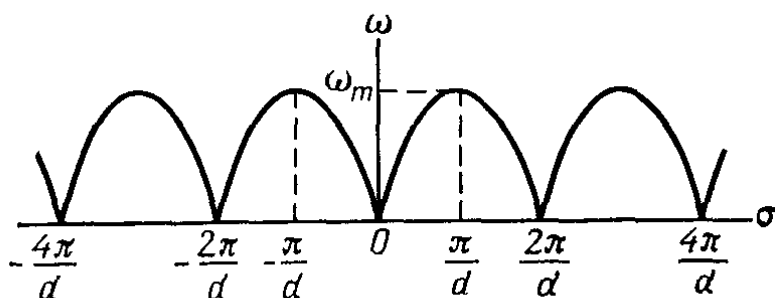
где

$$\omega_m^2 = \frac{4k}{m}. \quad (4)$$

Угловая скорость ω периодически изменяется в зависимости от σ . Период изменения равен $\sigma = 2\pi/\lambda$ ($\lambda = 2d$). Для значений волнового числа

$$\sigma_K = \sigma + K \frac{2\pi}{d} \quad (K - \text{целое число})$$

ω имеет ту же величину, что и для σ . Максимальная величина $\omega = \omega_m$ получается при $\sigma = \pi/d$. Фиг. 47.2 иллюстрирует эти



Фиг. 47.2

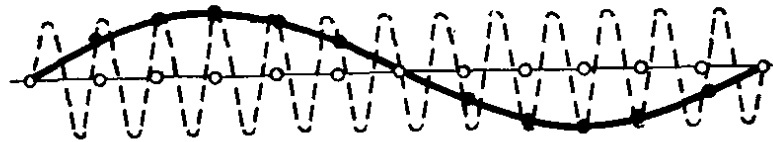
результаты. Вдоль рассматриваемой цепочки могут распространяться только волны со значениями угловых частот, заключенных в интервале между 0 и ω_m .

При $\exp(j2K\pi) = 1$ решения (2) для σ и σ_K одинаковы. Если нужно получить однозначное соотношение между колебательным состоянием и модулем волнового вектора, необходимо ограничить последний интервалом $2\pi/d$. Обычно выбирают следующий интервал:

$$-\frac{\pi}{d} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{d}.$$

Положительные значения σ соответствуют волнам, распространяющимся вдоль цепочки в положительном направлении, а отрицательные — волнам, распространяющимся в обратном направлении.

Можно найти условия, налагаемые на волновой вектор, другим методом: путем рассмотрения длины волны. Волна длиной



Фиг. 47.3

$\lambda = 12d$ изображена на фиг. 47.3 сплошной линией, так что $\sigma = 2\pi/12d$, а пунктирная линия представляет волну

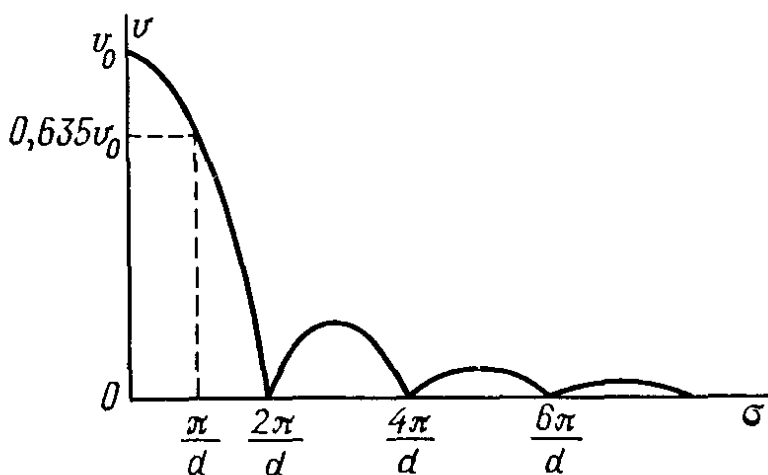
$$\sigma' = 2\pi \left(\frac{1}{12d} + \frac{1}{d} \right),$$

так что $\lambda' = 12d/13$. Смещения s одинаковы.

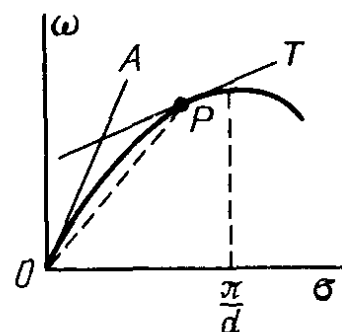
2. При использовании (3) фазовая скорость волн (2) может быть представлена в виде

$$v_\phi = \frac{\omega}{\sigma} = \frac{\omega_m d}{2} \frac{\sin \sigma d/2}{\sigma d/2} = v_0 \frac{\sin \sigma d/2}{\sigma d/2}. \quad (5)$$

В такой форме функция $\sin x/x$ имеет абсолютное значение, изменяющееся в зависимости от σ , как это показано на фиг. 47.4.



Фиг. 47.4



Фиг. 47.5

Фазовая скорость максимальна и равна v_0 при $\sigma = 0$ ($\lambda = \infty$). Она понижается до $2/\pi = 0,635$ от этого значения при $\sigma = \pi/d$ и стремится к нулю вместе с ω при $\sigma = 2\pi/d$.

Фазовая скорость в какой-либо точке P на фиг. 47.2 определяется наклоном сегмента OP (фиг. 47.5). Групповая скорость $v_g = d\omega/d\sigma$ представлена наклоном касательной PT в этой точке.

Пользуясь (3), имеем

$$v_g = \frac{\omega_m d}{2} \cos \frac{\sigma d}{2} = v_0 \cos \frac{\sigma d}{2}.$$

Для очень малых значений σ кривую $\omega(\sigma)$ можно считать совпадающей с ее касательной OA в начале координат. В результате v_ϕ будет постоянной величиной, и цепочка частиц, которую можно рассматривать как непрерывную среду в случае распространения волн с длинами $\lambda \gg d$, не будет обладать дисперсией. Известно, что это имеет место при распространении вдоль струны упругих волн со звуковыми частотами.

3. Выражение (5) можно записать

$$v_\phi = v_0 \frac{\sin \pi/N}{\pi/N},$$

обозначая через $N = \lambda/d$ число частиц, уместящихся на длине волны. Следующая таблица дает значения v_ϕ в зависимости от N :

N	2	4	8	12	16	20	∞
v_ϕ/v_0	0,636	0,900	0,974	0,989	0,994	0,996	1

Относительные изменения показателя преломления и, следовательно, фазовой скорости составляют приблизительно 0,02 для NaCl и 0,018 для KCl. Если для диспергирующей среды используется эта модель, то число частиц, уместящихся на длине волны, не должно быть больше 10. Однако известно, что расстояния d имеют порядок нескольких ангстрем и, таким образом, по крайней мере тысяча атомов уместяется на длине волны видимого света. Теория дисперсии для этой области спектра должна учитывать внутримолекулярную структуру.

ЗАДАЧА 48

Дисперсионная формула Зельмейера

I

Квантовомеханическое выражение для дисперсии показателя преломления вещества как функции частоты ν вдали от области поглощения записывается в виде

$$n^2 = 1 + \frac{2N}{3h\epsilon_0} \sum_i \frac{\nu_i d_i^2}{\nu_i^2 - \nu^2}, \quad (1)$$

где h — постоянная Планка, ϵ_0 — электрическая постоянная, d_i — дипольный момент перехода с частотой ν_i , а N — число молекул в единице объема.

Принимая, что моменты d_i создаются гармоническими осцилляторами с зарядами q_i , массами m_i и энергиями $W = h\nu_i$, покажите, что уравнение (1) эквивалентно классическому выражению

$$n^2 = 1 + \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0} \sum_i \frac{N_i f_i q_i^2}{m_i (\nu_i^2 - \nu^2)}. \quad (2)$$

В этом выражении каждый осциллятор имеет только одну собственную частоту и осцилляторов столько, сколько собственных частот. f_i — численный коэффициент, называемый силой осциллятора. Найдите выражение для f_i в случае, когда рассматривается только единственный переход. Тогда окажется, что f_i имеет порядок единицы и можно считать, что $f_i = 1$.

II

Дисперсия показателя преломления водорода при нормальных условиях (температуре и давлении) в интервале от 0,4 до 9 мкм может быть представлена в виде

$$n^2 = 1 + 2,721 \cdot 10^{-4} + \frac{2,11}{\lambda^2} \cdot 10^{-18} \quad (\lambda \text{ в м}). \quad (3)$$

Чтобы связать это выражение с теоретическим (2), запишем его следующим образом:

$$n^2 = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right). \quad (4)$$

Найдите значения A и B и убедитесь, что собственная частота осциллятора лежит в ультрафиолетовой области. Найдите отношение q/m . К какой частице применимо полученное значение? Плотность водорода $\mu = 9,0 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, число Фарадея $\mathfrak{N}e = 9,65 \cdot 10^7 \text{ Кл}$, где $\mathfrak{N}$ — число молекул в одном киломоле и e — элементарный заряд.

III

В интервале между 0,3 и 10 мкм показатель преломления CaF_2 определяется формулой

$$n^2 = 6,09 + \frac{6,12 \cdot 10^{-15}}{\lambda^2 - 8,88 \cdot 10^{-15}} + \frac{5,10 \cdot 10^{-9}}{\lambda^2 - 1,26 \cdot 10^{-9}} \quad (\lambda \text{ в м}). \quad (5)$$

Запишите уравнение (2) в виде

$$n^2 = A + \frac{C_1 \lambda_1^4}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{C_2 \lambda_2^4}{\lambda^2 - \lambda_2^2}. \quad (6)$$

Сравнивая его с (5), найдите выражения для A , C_1 и C_2 . Определите λ_1 и λ_2 , а также отношение C_2/C_1 . Предполагая, что осциллятор, ответственный за инфракрасное поглощение, представляет систему из двух ионов F^- , смещенных относительно фиксированного иона Ca^{++} , найдите отношение m_H/m_e — массы протона к массе электрона и сравните его с теоретическим значением 1830 ($m_F = 19m_H$).

IV

Покажите, что в рентгеновской области спектра можно пренебречь собственными частотами всех электронов и ионов. Запишите (2) в виде

$$n^2 = 1 - K\lambda^2. \quad (7)$$

Получите выражение для K и его численное значение для меди, у которой $A = 63$, плотность $\mu = 8 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ и атомный номер $Z = 29$.

Вычислите значение фазовой скорости v_ϕ и групповой скорости v_g в рентгеновской области спектра.

Каков должен быть закон дисперсии для среды, удовлетворяющей соотношению $v_\phi v_g = c^2$, где c — скорость света в вакууме?

РЕШЕНИЕ

I

Энергия гармонического осциллятора с частотой ν_i определяется формулой

$$W_i = h\nu_i = 4\pi^2 m_i \nu_i^2 s_i^2,$$

где s_i — смещение. Дипольный момент $d_i = q_i s_i$. Для осцилляторов типа i имеем

$$\frac{2N\nu_i d_i^2}{3\epsilon_0 h} = \frac{2N\nu_i^2 s_i^2 q_i^2}{3\epsilon_0 h_i \nu_i} = \frac{2Nq_i^2}{3\epsilon_0 4\pi^2 m_i}.$$

Сравнивая (1) и (2), находим, что

$$f_i = 2/3.$$

II

При $v \ll v_i$ уравнение (2) для одного перехода можно записать в виде

$$n^2 = 1 + \frac{Nq^2}{4\pi^2\epsilon_0 m v_i^2} \frac{1}{1 - v^2/v_i^2} = 1 + \frac{Nq^2}{4\pi^2\epsilon_0 m v_i^2} \left(1 + \frac{v^2}{v_i^2}\right),$$

и с учетом, что $\lambda = c/v$ и $\lambda_i = c/v_i$:

$$n^2 = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right),$$

где

$$A = \frac{Nq^2}{4\pi^2\epsilon_0 m v_i^2}, \quad B = \frac{v^2}{v_i^2} \lambda^2 = \lambda_i^2, \quad \frac{A}{B} = \frac{Nq^2}{4\pi^2\epsilon_0 c^2 m}.$$

Сравнивая коэффициенты (3) и (4), находим

$$A = 2,712 \cdot 10^{-4}, \quad B = \frac{2,11 \cdot 10^{-14}}{2,721} = 0,78 \cdot 10^{-14} = \lambda_i^2,$$

откуда

$$\lambda_i = \sqrt{0,78} \cdot 10^{-7} \approx 0,9 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 900 \text{ \AA},$$

λ_i лежит в далекой ультрафиолетовой области.

Чтобы определить отношение заряда к массе осциллятора q/m , запишем

$$\frac{A}{B} = k^2 \frac{e}{m} \frac{Ne}{4\pi^2\epsilon_0 c^2},$$

принимая $q = ke$, где e — элементарный заряд, а k — целое число. Имеем $N = \mathfrak{N}_\mu / M$ (M — молекулярный вес в данном случае равен 1), отсюда

$$Ne = \mathfrak{N}_\mu e = 9,65 \cdot 10^7 \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 0,87 \cdot 10^7 \text{ Кл}$$

и

$$4\pi\epsilon_0 c^2 = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{16}}{4\pi \cdot 0 \cdot 10^9} = 10^7;$$

отсюда

$$k^2 \frac{e}{m} = \frac{2,721 \cdot 10^{-4}}{0,78 \cdot 10^{-14}} \frac{3,14 \cdot 10^7}{0,87 \cdot 10^7} = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$$

Величина e/m составляет $1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Тогда $k = 1$ и осцилляторами, отвечающими за ультрафиолетовое поглощение, являются электроны. Известно, что переходы в ультрафиолетовой области спектра связаны с изменением электронной энергии молекулы.

III

Если в (2) оставить только два первых члена, имеем

$$n^2 = 1 + \frac{N_1 q_1^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_1} \frac{1}{v_1^2 - v^2} + \frac{N_2 q_2^2}{4\pi \epsilon_0 m_2} \frac{1}{v_2^2 - v^2}. \quad (8)$$

Заменяя v на c/λ , получаем

$$n^2 = 1 + \frac{N_1 q_1^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c^2 m_1} \frac{\lambda^2 \lambda_1^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{N_2 q_2^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c^2 m_2} \frac{\lambda^2 \lambda_2^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2},$$

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + C_1 \frac{\lambda^2 \lambda_1^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + C_2 \frac{\lambda^2 \lambda_2^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} = \\ &= 1 + C_1 \frac{\lambda_1^2 (\lambda^2 - \lambda_1^2 + \lambda_1^2)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + C_2 \frac{\lambda_2^2 (\lambda^2 - \lambda_2^2 + \lambda_2^2)}{\lambda^2 - \lambda_2^2}. \end{aligned}$$

$$n^2 = 1 + C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_2^2 + \frac{C_1 \lambda_1^4}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{C_2 \lambda_2^4}{\lambda^2 - \lambda_2^2}.$$

Таким образом,

$$A = 1 + C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_2^2, \quad C_1 = \frac{N_1 q_1^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c^2 m_1}, \quad C_2 = \frac{N_2 q_2^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c^2 m_2}.$$

Сравнение с эмпирическим выражением (5) дает следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{88,8 \cdot 10^{-16}} = 9,42 \cdot 10^{-8} \text{ м} = \\ &= 942 \text{ \AA} \text{ (ультрафиолетовая область)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \sqrt{12,6 \cdot 10^{-10}} = 3,55 \cdot 10^{-5} \text{ м} = \\ &= 35 \text{ мкм (инфракрасная область)}, \end{aligned}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{C_2 \lambda_2^4}{C_1 \lambda_1^4} \frac{\lambda_1^4}{\lambda_2^4} = \frac{5,10 \cdot 10^{-9}}{6,12 \cdot 10^{-15}} \left(\frac{8,88 \cdot 10^{-15}}{1,26 \cdot 10^{-9}} \right)^2 = 4,15 \cdot 10^5 \frac{N_2 q_2^2}{N_1 q_1^2} \cdot \frac{m_1}{m_2}.$$

Первый член в выражении для дисперсии относится к электрону, и $q_1 = e$, а $m_1 = m_e$. С другой стороны, $q_2 = e$ (ион F^- одновалентен) и $m_2 = 19m_H$. Имеются два валентных электрона, которые оба являются оптическими, и два иона F^- . Считаем, что $N_1 = N_2$. Тогда

$$\frac{m_H}{m_e} = \frac{1}{19 \cdot 4,15 \cdot 10^{-5}} = 1270.$$

Эта величина того же порядка, что и отношение 1830. Подобные приближенные вычисления играли важную роль на рубеже двух столетий, когда использовали предположение об атомной природе осцилляторов, активных в инфракрасной области спектра.

IV

а) В рентгеновской области спектра ν очень велико (порядка 10^{18}), а λ — очень мало (порядка нескольких ангстрем). Таким образом, $\nu \gg \nu_1 \gg \nu_2$. С другой стороны, массы m_2 ионов почти в 2000 раз больше, чем массы электронов, в то время как N_1 в (8) имеет такой же порядок, как N_2 , а q_1 — такой же, как q_2 . Следовательно, последним членом в этом выражении можно пренебречь. Тогда, учитывая, что ν — больше, чем все собственные частоты электронов, имеем

$$n^2 \approx 1 - \frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e \nu^2} = 1 - \frac{Ne^2 \lambda^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c^2 m_e} = 1 - K\lambda^2,$$

принимая

$$K = \frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c^2 m_e}.$$

N — полное число электронов в единице объема. В каждом атоме Z электронов, поэтому

$$Ne = NeZ \frac{\mu}{A}.$$

Для меди

$$Ne = 9,65 \cdot 10^7 \cdot 29 \frac{8 \cdot 10^3}{63} = 3,5 \cdot 10^{11},$$

откуда

$$K = 3,5 \cdot 10^{11} \cdot 1,76 \cdot 10^{11} \frac{1}{3,14 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^{15}.$$

б) По определению

$$\begin{aligned} v_\Phi &= \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - K\lambda^2}}, \\ v_g &= \frac{\partial \nu}{\partial (v/v_\Phi)} = \frac{\partial \nu}{\partial (n\nu/c)} = \frac{\partial (c/\lambda)}{\partial (n/\lambda)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (7) находим

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 + K = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2,$$

откуда

$$v_g = nc.$$

Тогда имеем

$$v_\Phi v_g = c^2. \quad (10)$$

Вообще, чтобы удовлетворить соотношению (10), необходимо, чтобы

$$v_g = nc, \quad \text{так как} \quad v_\varphi = \frac{c}{n}.$$

Используя (9), можно получить

$$v_g = \frac{d(c/\lambda)}{d(n/\lambda)} = \frac{-c/\lambda^2}{1/\lambda (dn/d\lambda - n/\lambda^2)} = \frac{c}{n - \lambda (dn/d\lambda)},$$

таким образом,

$$n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} = \frac{c}{nc} = \frac{1}{n},$$

откуда

$$\frac{2n \, dn}{n^2 - 1} = \frac{2 \, d\lambda}{\lambda}.$$

Теперь находим

$$n^2 - 1 = \text{const} \cdot \lambda^2,$$

что и является законом дисперсии (7).

ЗАДАЧА 49

Дисперсия в области слабого поглощения

1. Исходя из уравнения (7) в задаче 51, дающего комплексную амплитуду электрического дипольного момента, индуцированного электромагнитной волной, для классической модели атома, найдите выражение для комплексного показателя преломления $n = n - jk$ в газообразной среде, содержащей N атомов в единице объема.

2. Из предыдущего выражения выведите соотношение для показателя преломления n и коэффициента поглощения k для случая, когда могут быть сделаны следующие предположения: поглощение очень слабое, так что при нахождении n можно пренебречь величиной k ; область поглощения очень узка, благодаря чему можно использовать уравнение

$$\omega_0^2 - \omega^2 = 2\omega_0(\omega_0 - \omega),$$

связывающее ω и ω_0 , если разность между ними не является существенной; в произведении nk следует считать $n = 1$.

3. Изобразите графически изменение n и k для этого случая, используя отношение

$$u = \frac{2(\omega_0 - \omega)}{g}$$

в качестве переменной.

4. Рассматриваемый газ пронизывается пучком немонохроматического света, для которого поток энергии через единицу поверхности $\Phi_0 = \int \Phi_\omega d\omega$, где интервал $d\omega$ полностью охватывает область спектрального поглощения. Предполагая, что монохроматический поток Φ_ω имеет одинаковое значение для всех значений ω , найдите величину потока $-d\Phi_0$, поглощаемого при прохождении через газ толщиной dx , как функцию коэффициента поглощения k , найденного в ответе на третий вопрос, и плотность излучаемой энергии $w(\omega)$. Вспомните, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \pi.$$

Каково будет выражение для поглощения потока, если плотность энергии выражается как функция частоты ν , а не угловой частоты ω ?

РЕШЕНИЕ

1. Исходным выражением для дипольного момента осциллятора с зарядом q и массой m является

$$\mathbf{p} = \frac{q^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + jg\omega)}. \quad (1)$$

Поляризация $\mathbf{P}$ газа, состоящего из таких атомов, будет

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p},$$

а комплексный показатель преломления

$$n^2 - 1 = \epsilon_r - 1 = \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0 E} = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + jg\omega)}. \quad (2)$$

После разделения $\mathbf{n} = n - jk$ на действительную и мнимую части получаем

$$n^2 - k^2 = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2 \omega^2} \quad (3)$$

и

$$2nk = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{g\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2 \omega^2}. \quad (4)$$

2. Приближения, допускаемые по условию задачи, приводят к выражениям

$$n - 1 = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{2\omega_0(\omega_0 - \omega)}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + g^2 \omega_0^2} = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m \omega_0 g} \cdot \frac{u}{u^2 + 1} = \frac{Cu}{u^2 + 1}, \quad (5)$$

$$k = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{g\omega}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + g^2 \omega_0^2} = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m \omega_0 g} \cdot \frac{1}{u^2 + 1} = \frac{C}{u^2 + 1}, \quad (6)$$

где C — постоянная величина, равная

$$\frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m \omega_0 g}.$$

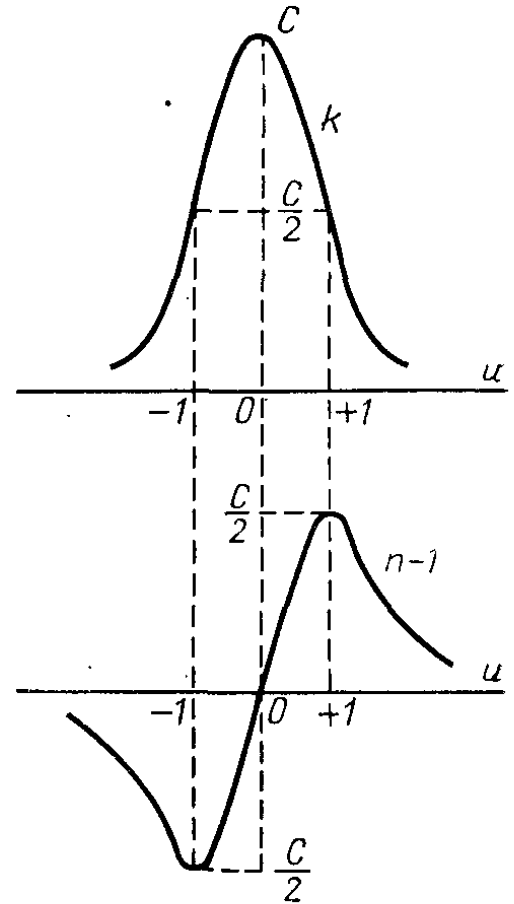
3. Кривые, представляющие $n-1$ и k в зависимости от u , приведены на фиг. 49.1. При $u=0$ ($\omega=\omega_0$) $n-1$ — исчезающе малая величина, а k проходит через максимальное значение, равное C . При $u=\pm 1$ ($|\omega_0-\omega|=g/2$) $n-1$ проходит через максимальное значение по абсолютной величине, равное $C/2$, в то же время k принимает значение $C/2$. Интервал $2|\omega_0-\omega|=g$ является шириной линии поглощения.

4. Закон поглощения для пучка монохроматического света может быть записан в следующем виде:

$$-\frac{d\Phi_m}{dx} = 2K\Phi_\omega,$$

где K — коэффициент поглощения, связанный с показателем преломления соотношением $K=k\omega/c$. Потери потока энергии по всей области поглощения составляют

$$-\frac{d\Phi_0}{dx} = \frac{2\Phi_0}{c} \int k\omega d\omega. \quad (7)$$



Фиг. 49.1

Заменяя k на его выражение (6), ω на ω_0 и $d\omega$ на $-g/2 \cdot du$, получаем

$$\frac{d\Phi_0}{dx} = \frac{\Phi_0 N q^2}{2\epsilon_0 m c} \int \frac{du}{u^2 + 1}.$$

Интеграл по всей площади, заключенной между кривой $k(u)$ и абсциссой, на фиг. 49.1 дает значение $\text{arctg } u$. Он имеет примерно одинаковое значение в спектральном интервале, где поглощение существенно и в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. В последнем интервале он равен π , откуда

$$\frac{d\Phi_0}{dx} = \frac{\Phi_0 N \pi q^2}{2\epsilon_0 m c}. \quad (8)$$

Световой поток параллельного пучка связан с плотностью энергии соотношением $\Phi_0 = c\omega$ (c — скорость электромагнитных волн в среде, где n предполагается близким к единице). При

использовании Φ_0 из (7) ω можно теперь выразить в функции ω и (8) принимает вид

$$\frac{d\Phi_0}{dx} = \frac{N\pi q^2}{2\varepsilon_0 m} \psi(\omega).$$

Если взять $\nu = \omega/2\pi$ в качестве переменной и учесть, что $\Phi_0(\omega) d\omega = \Phi_0(\nu) d\nu$,

$$\Phi_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \Phi_0(\nu) = \frac{c}{2\pi} \psi(\nu),$$

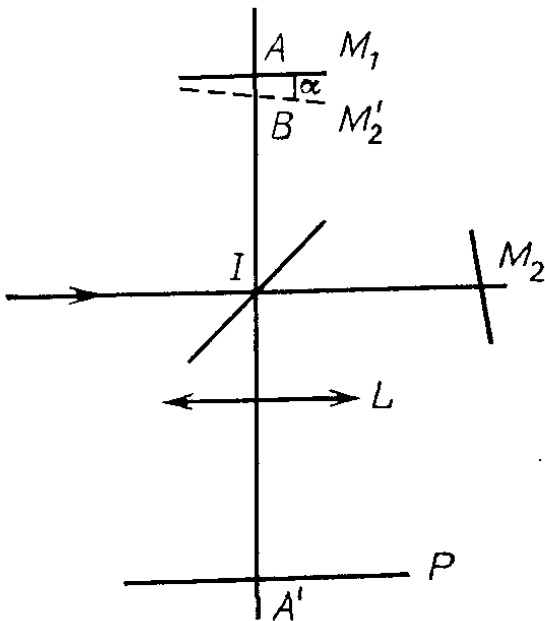
а

$$\frac{d\Phi_0}{dx} = \frac{Nq^2}{4\varepsilon_0 m} \psi(\nu). \quad (9)$$

ЗАДАЧА 50

Полосатые спектры. Аномальная дисперсия в парах

Интерферометр Майкельсона установлен таким образом, что изображение M'_2 зеркала M_2 , даваемое разделительным зеркалом Sr , составляет угол α с зеркалом M_1 , а расстояние между M_1 и M'_2 (изображение M_2 в Sr), измеренное вдоль AA' , имеет заданную величину $AB = e_0$. Линза L проецирует изображение M_1 на плоскость P с единичным увеличением (фиг. 50.1).



Фиг. 50.1

1. Интерферометр освещается светом с длиной волны λ . Объясните, почему наблюдаются прямые равноудаленные полосы в плоскости P . При условии, что в интервале 5 см располагается 250 полос, определите расстояние между полосами i и угол α для $\lambda = 3009,14 \text{ \AA}$.

2. Монохроматический источник заменен источником белого

света. Что наблюдается в плоскости P при условии, что e_0 составляет величину порядка 1 мм?

3. Щель спектрографа расположена в плоскости P . Щель очень узка и параллельна полосам, наблюдаемым в монохроматическом свете. Она проходит через точку A' , являющуюся изображением точки A , создаваемым линзой L . Что получится на фотопластинке, если интерферометр освещен источником непрерывного спектра? Для упрощения этого и последующих вопросов примите такие допущения:

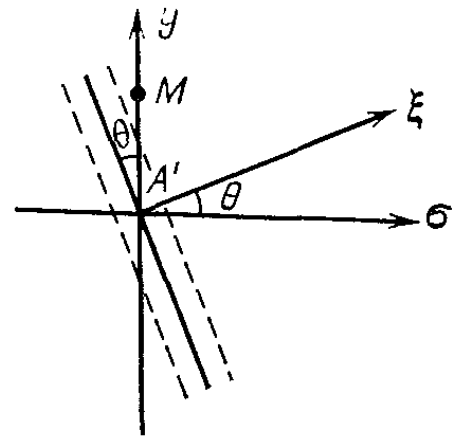
дисперсия спектрографа линейна относительно волнового числа в рассматриваемой области;

положения максимальной освещенности на пластинке определяются по соответствующим волновым числам σ ;

увеличение в направлении, перпендикулярном направлению дисперсии, равно единице.

Найдите e_0 , зная, что расстояние между двумя последовательными максимумами освещенности укладывается между длинами волн $\lambda = 3009,14 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 3034,12 \text{ \AA}$ 50,2 раза.

4. Спектрограф наклонен так, что входная щель, которая всегда проходит через точку A' , составляет некоторый угол θ с направлением монохроматических полос. Положение точки M на щели определяется ее расстоянием $y = A'M$ от A' (фиг. 50.2). На рисунке полосы вертикальны и порядок интерференции возрастает слева направо. Найдите разность хода для лучей, интерферирующих в точке M , как функцию y , e_0 , θ , σ и i — расстояния между полосами в плоскости P для излучения σ . Что наблюдается в плоскости фотопластинки, если источник является непрерывным в таком спектральном интервале, где можно пренебречь изменениями i в зависимости от σ ?



Фиг. 50.2

5. В каждом плече интерферометра помещаются закрытые цилиндрические кюветы длиной d с прозрачными параллельными окошками, установленные параллельно плечам. Обе кюветы одинаковы, но одна из них откачана, а другая содержит нагретые пары олова. Расположение кювет таково, что разность хода для интерферирующих лучей уменьшается по абсолютному значению для излучения, у которого показатель преломления газа больше.

Вспомните, что дисперсия показателя преломления газа определяется уравнением Зельмейера, которое для поглощения отдельной линии при низком давлении можно записать в виде

$$n - 1 = \frac{-B\lambda_0}{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0},$$

где $\lambda_0 (= 1/\tilde{\nu}_0)$ есть длина волны поглощаемой линии, а B — величина, связанная с числом атомов в единице объема, а также с зарядом и массой электрона. (Это соотношение нарушается при $\tilde{\nu} \cong \tilde{\nu}_0$.)

Интерферометр освещается источником белого света.

а) Что происходит с выражением, полученным в ответе на предыдущий вопрос?

б) Что наблюдается на фотопластинке вблизи $\tilde{\nu}_0$? Покажите, что каждая полоса имеет в двух точках горизонтальные касательные (параллельные направлению дисперсии спектрографа). Полезно сделать замену переменных $x = \tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0$.

в) Найдите значения x и y для этих точек. Найдите расстояние между касательными Δy и выразите его как функцию i , B , d и e_0 .

Численный пример:

$$\sin \theta = 0,1,$$

$$d = 20 \text{ см},$$

$$B = 600 \text{ м для } \lambda_0 = 3009,14 \text{ Å}.$$

РЕШЕНИЕ

1. Наблюдаются полосы равной толщины при интерференции на воздушном клине. Расстояния между полосами в монохроматическом свете

$$i = \frac{50}{250} = 0,2 \text{ мм}.$$

Кроме того, имеем

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha}, \text{ следовательно, } \alpha = \frac{\lambda}{2i} = \frac{3009,14}{2 \cdot 0,2 \cdot 10^7} \approx \frac{3 \cdot 10^4}{0,4} \text{ рад} = 2,5. \quad (1)$$

2. Наблюдение в белом свете. Порядок интерференции

$$p \approx \frac{2e_0}{\lambda} \approx 4000$$

высокий. Плоскость P освещена белым светом.

3. Щель спектрографа параллельна полосам. Наблюдается «канавчатый» спектр, имеющий около пятидесяти ярких полос между 3009 и 3034 Å.

Разность хода в направлении оси интерферометра такова, что

$$\delta = 2e_0 = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2 = (k_1 - 50,2) \lambda_2, \quad (2)$$

следовательно,

$$k_1 = \frac{50,2 \lambda_2}{\Delta \lambda} = 50,2 \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{24,98}$$

и

$$e_0 = \frac{1}{2} k_1 \lambda_1 = \frac{50,2}{2} \cdot \frac{9 \cdot 10^6}{24,98} = \frac{45,18}{49,86} \cdot 10^7 \text{ Å},$$

$$e_0 = 0,94 \text{ мм}.$$

4. Щель спектрографа наклонена к полосам под углом θ . Пусть $A'\xi$ — ось, перпендикулярная направлению полос. Разность хода в некоторой точке на абсциссе ξ

$$\delta_1 = 2(e_0 + \alpha\xi).$$

Заменяя α выражением, полученным в ответе на первый вопрос, а ξ на $y \sin \theta$, имеем

$$\delta_1 = 2\left(e_0 + \frac{\lambda}{2i} y \sin \theta\right) = 2e_0 + \frac{y \sin \theta}{i\tilde{\nu}}.$$

Таким образом, разность хода в точке M равна

$$\delta_1 = 2e_0 + \frac{y \sin \theta}{i\tilde{\nu}}. \quad (3)$$

Если спектральный интервал мал, то можно считать i постоянной величиной. Наибольшая интенсивность интерференционных полос получается при

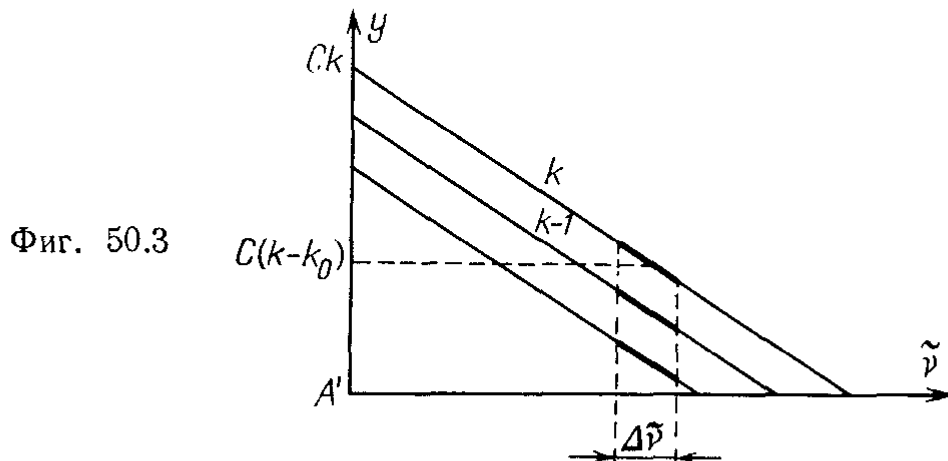
$$\delta_1 = k\lambda = \frac{k}{\tilde{\nu}} \quad (k — \text{целое число}). \quad (4)$$

Дисперсия спектрографа линейна относительно волновых чисел (возьмите коэффициент пропорциональности равным 1). Комбинируя (3) и (4), можно записать:

$$y = C(k - 2e_0\tilde{\nu}), \quad (5)$$

принимая $i/\sin \theta = \text{const} = C$.

Это уравнение прямой линии с наклоном $-2Ce_0$. Ось y пересекается в точке $y = Ck$, а пересечение с $A'\tilde{\nu}$ будет при $\tilde{\nu} = k/2e_0$.



Яркие полосы являются отрезками прямых (фиг. 50.3). Порядок интерференции в точке A' для длины волны λ_0 обозначен через k_0 .

5. Дисперсия в парах олова. а) Кювета создает дополнительную разность хода, равную $2(n-1)d$. Следовательно, новая разность хода в точке M (принимая во внимание знак в соот-

ветствии с условием) будет равна

$$\delta_2 = 2 \left[e_0 - (n - 1) d + \frac{\lambda}{2i} y \sin \theta \right].$$

Уравнение Зельмейера дает

$$n - 1 = - \frac{B \lambda_0}{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0}. \quad (6)$$

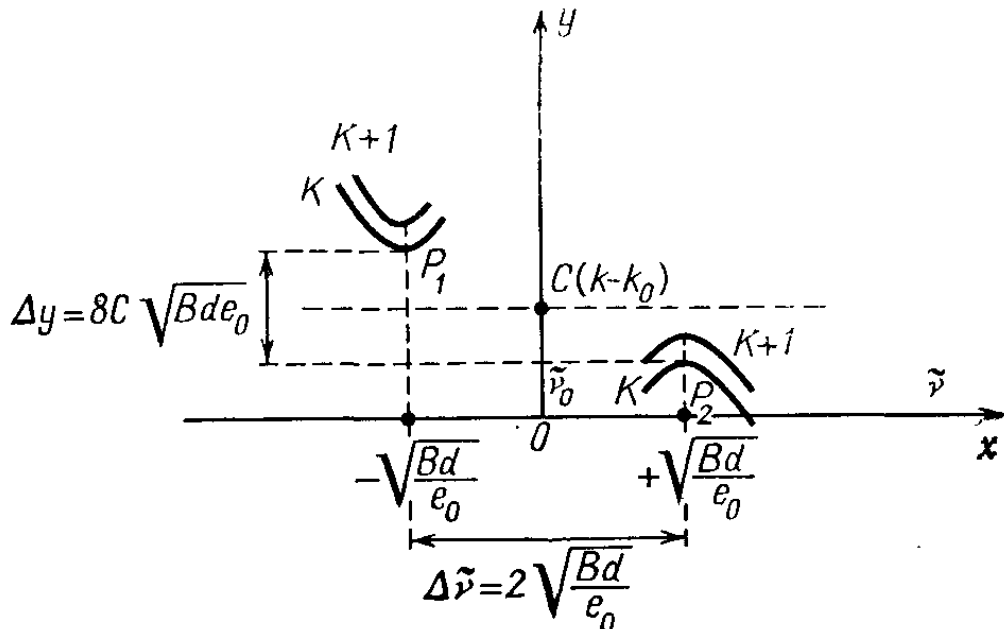
В спектральном интервале, где i можно считать постоянной величиной, наблюдаем интерференционную картину для

$$\frac{k}{\tilde{\nu}} = 2 \left(e_0 + \frac{B \lambda_0 d}{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0} \right) + \frac{y}{C} \frac{1}{\tilde{\nu}}.$$

Обозначив $\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = x$, получаем

$$y = C \left\{ (k - 2\sigma_0 e_0 - 2B\lambda_0 d) - 2 \left(x e_0 + \frac{Bd}{x} \right) \right\}. \quad (7)$$

б) Это уравнение позволяет описать полосу порядка k в спектральном интервале около $\tilde{\nu}_0$ (но при $\tilde{\nu} \neq \tilde{\nu}_0$).



Фиг. 50.4

Точки P_1 и P_2 с горизонтальными касательными задаются условием $dy/dx = 0$, так что $e_0 - Bd/x^2 = 0$ или $x = \pm \sqrt{Bd/e_0}$. Подставляя значения x в уравнение (7), получают расстояние между двумя точками P_1 и P_2 (фиг. 50.4):

$$\Delta y = 4C \left(e_0 \sqrt{\frac{Bd}{e_0}} + \sqrt{\frac{e_0}{Bd}} \cdot \sqrt{Bd} \right) = 8C \sqrt{Bde_0}.$$

Численный пример:

$$x = \pm \sqrt{\frac{Bd}{e_0}} = \pm \sqrt{\frac{600 \cdot 0,2}{10^{-3}}} = \pm \sqrt{12} \cdot 10^{-2} = \pm 347 \text{ м}^{-1},$$

$$x = \pm 3,47 \text{ см}^{-1},$$

$$\Delta y = 8 \cdot \frac{0,2}{0,1} \sqrt{600 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = 16 \sqrt{12} \cdot 10^{-1} = 5,5 \text{ мм}.$$

В уравнении (7) при $x \rightarrow \pm \sqrt{Bd/e_0}$ член

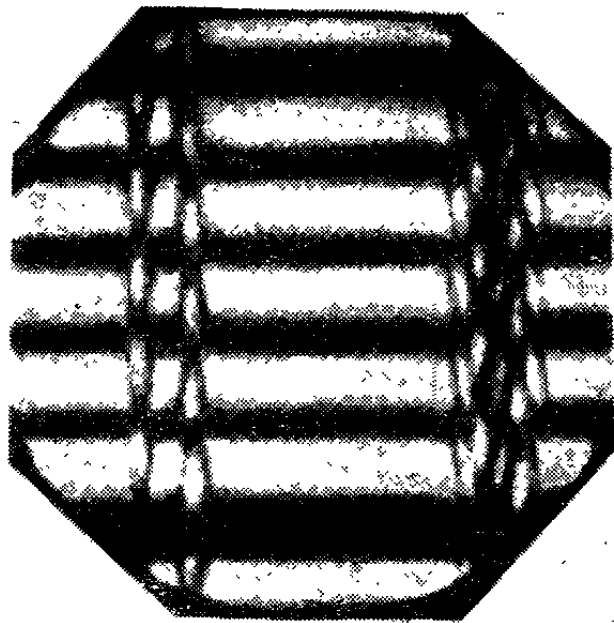
$$2B\lambda_0 d = 2 \cdot 600 \cdot 0,3 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 = 72 \cdot 10^{-6}$$

пренебрежимо мал по сравнению с $2\sqrt{Bde_0} = 2\sqrt{12} \cdot 10^{-1}$.

Вблизи точек P_1 и P_2 участки яркой полосы порядка k определяются уравнением

$$y = C \left[(k - k_0) - 2 \left(xe_0 + \frac{Bd}{x} \right) \right]. \quad (8)$$

Для других порядков светлые полосы получаются одна из другой путем смещения параллельно оси Oy (фиг. 50.4). На



Фиг. 50.5

фиг. 50.5 показан вид полос, наблюдающихся для газа, имеющего много линий поглощения.

ЗАДАЧА 51

Рассеяние электромагнитного излучения в классической атомной модели

Рассмотрим атомную модель, в которой электрон с массой m_e и зарядом e упруго связан с атомом и способен совершать гармонические колебания. Пусть ω_0 будет его собственной угловой частотой.

I

При свободном колебании этот осциллятор излучает энергию. Потеря энергии в единицу времени определяется выражением

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3} \langle \ddot{p}^2 \rangle,$$

где W — энергия, t — время, c — скорость света, p — электрический дипольный момент осциллятора, а $\langle \ddot{p}^2 \rangle$ — среднее значение квадрата второй производной от p по времени. Потеря энергии приводит к затуханию колебания. Найдите коэффициент затухания g , происходящего в результате излучения осциллятора.

II

1. N одинаковых независимых атомов в единице объема, описываемых указанной выше моделью, помещаются в поле параллельных лучей излучения с угловой частотой ω и с колебаниями электрического поля вдоль оси Oy . Падающее излучение распространяется в направлении Ox . Под действием этого поля атомные осцилляторы совершают вынужденные колебания. Рассчитайте электрический дипольный момент атома.

Атомные осцилляторы, совершая вынужденные колебания, сами излучают. Найдите выражение для полного потока, рассеиваемого единицей объема среды, как функцию энергии падающего излучения.

2. Рассмотрите случай, когда $\omega_0^2 \gg \omega^2$ или $\lambda_0^2 \ll \lambda^2$. Покажите, что интенсивность рассеянного света пропорциональна λ^{-4} , где λ — длина волны падающего и рассеянного излучений. Найдите отношение интенсивности падающего света к интенсивности рассеянного света в единице объема. Предположите, что

$$N = 10^{28} \text{ м}^{-3}; \quad \frac{\lambda_0}{\lambda} = 0,1.$$

Найдите также отношение интенсивностей излучения, рассеянного в красной области, для $\lambda = 7000 \text{ Å}$, и в фиолетовой, для $\lambda = 4000 \text{ Å}$, в предположении, что интенсивность падающего излучения одна и та же в обоих случаях. Обсудите эти результаты и покажите, что с их помощью можно объяснить голубой цвет неба и красный цвет заходящего солнца.

3. Наконец, рассмотрите случай $\omega_0^2 \ll \omega$, имеющий место в рентгеновской области. Найдите выражение для рассеянного излучения в этом случае. Рассчитайте отношение интенсивностей рассеянного излучения к падающему, принимая в этом случае $N = 10^{22} \text{ см}^{-1}$.

Сравните эти отношения для $^{64}_{29}\text{Cu}$ и $^{207}_{82}\text{Pb}$, принимая в первом случае число атомов в см^3 равным $8 \cdot 10^{22}$, а во втором — $3 \cdot 10^{22}$. Предполагается, что все электроны атомов принимают участие в рассеянии рентгеновских лучей.

III

1. Теперь рассмотрите проводник с проводимостью γ . Предполагая, что среда непрерывна, напишите для этого случая уравнения Максвелла. Считая, что электрическое поле изменяется синусоидально с угловой частотой ω и распространяется в направлении Ox , найдите действительную и мнимую части комплексной диэлектрической проницаемости.

2. Установите дисперсионное соотношение для металла. В этом случае можно предположить, что электроны, отвечающие за оптические свойства, являются свободными, так что $\omega_0 = 0$. Считайте, что показатель затухания g отличен от нуля.

Выведите выражения для действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости.

а) Рассмотрите случай $\omega \gg g$. Найдите действительную и мнимую части диэлектрической проницаемости. Сравните их с результатами, полученными в разделе III, 1 и найдите показатель затухания как функцию γ . Что обращает на себя внимание в этом выражении?

б) Рассмотрите случай $\omega \ll g$. Обсудите дисперсионное выражение для этого случая. Найдите длину волны λ_0 , для которой комплексная диэлектрическая проницаемость равна нулю. Обсудите свойства среды для $\lambda > \lambda_0$ и $\lambda < \lambda_0$.

3. В случае III, 2, б выразите комплексную диэлектрическую проницаемость как функцию λ_0 и λ и рассчитайте коэффициент отражения R среды при $(\lambda/\lambda_0)^2 \ll 1$ и при $(\lambda/\lambda_0)^2 \gg 1$.

4. Найдите силы осцилляторов для Cs, Rb, K, Na и Li при условии, что соответствующие значения λ_0 равны 4400, 3600, 3150, 2100 и 2050 Å и число свободных электронов в 1 м^3 равно $0,85 \cdot 10^{28}$; $1,1 \cdot 10^{28}$; $1,3 \cdot 10^{28}$; $2,5 \cdot 10^{28}$ и $4,5 \cdot 10^{28}$ соответственно.

РЕШЕНИЕ

I

Осциллятор обладает электрическим дипольным моментом $p = es$, где s — амплитуда движения электрона. Поскольку движение является гармоническим, имеем $\ddot{p} = -\omega_0^2 p$. Так как ω_0 — величина порядка 10^{15} с^{-1} , можно взять среднее значение

$\langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{1}{2} \ddot{p}^2$ в выражении для потери энергии в единицу времени

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{\omega_0^4 e^2 s_m^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (1)$$

Энергия осциллятора

$$W = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 s_m^2, \quad (2)$$

и тогда

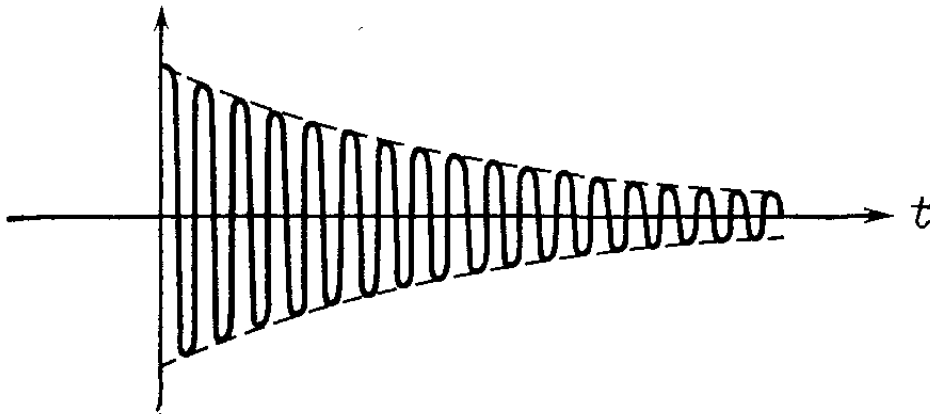
$$\frac{dW}{dt} = - \frac{\omega_0^2 e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e} W. \quad (3)$$

Таким образом, энергия уменьшается во времени экспоненциально:

$$W = W_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

$$\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e}{\omega_0^2 e^2}.$$

τ — постоянная времени. За время τ энергия уменьшается на $1/e = 0,368$ часть своего первоначального значения W_0 . Для ви-



Фиг. 51.1

димого излучения ($\omega_0 \approx 10^{15}$) это время порядка 10^{-7} с. Следовательно, оно содержит большое число периодов. Движение осциллятора является не чисто синусоидальным, а скорее синусоидальным с экспоненциальным затуханием. Оно может быть найдено при решении уравнения

$$m_e \left(\frac{d^2 s}{dt^2} + g \frac{ds}{dt} + \frac{\omega_0^2 s}{m_e} \right) = 0, \quad (4)$$

где искусственно вводится сила трения $m_e g (ds/dt)$, пропорциональная скорости; g есть коэффициент затухания. Чтобы найти его, приравняем потери энергии (3) к работе, производимой искусственно введенной силой за единицу времени:

$$m_e g \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = m_e g s_m^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega t,$$

где ω является псевдоугловой частотой, а $\omega^2 = \omega_0^2 - g/2$. Так как движение затухает медленно, можно допустить, что $\omega = \omega_0$.

Среднее значение этой работы, совершаемой за время большого числа псевдопериодов, равно

$$\frac{1}{2} m_e g s_m^2 \omega_0^2 = gW.$$

Приравнивая к (3), получаем

$$g = \frac{1}{\tau}. \quad (5)$$

II

1. Под влиянием поля $E_y = E_m \sin \omega t$ электрон подвергается действию силы eE_g и совершает движение, уравнение которого, выводимое из уравнения свободного движения (4), имеет вид

$$m_e \left(\frac{d^2 y}{ds^2} + g \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y \right) = + eE. \quad (6)$$

Так как напряженность поля E_y имеет синусоидальный характер, запишем ее выражение в комплексной форме $E_m \exp(j\omega t)$, а y заменим комплексной функцией $y = y_m \exp(i\varphi) \exp(j\omega t)$, изменяющейся с той же угловой частотой, что и частота приложенного поля. Уравнение (6) дает

$$y_m = \frac{-eE_m}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 + jg\omega)},$$

и индуцированный момент имеет комплексную амплитуду

$$p_m = -ey_m = \frac{e^2 E_m}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 + jg\omega)}, \quad (7)$$

модуль которой равен

$$p_m = \frac{e^2 E_m}{m_e \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2 \omega^2}}.$$

Излучение от этого синусоидального момента p эквивалентно излучению диполя Герца. Среднее значение потока, излучаемого им в пространство, имеет вид

$$\langle \Phi \rangle = \frac{\omega^4 p_m^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\omega^4 e^4 E_m^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2 \omega^2]}.$$

Если атомы независимы, как в случае идеального газа, их излучение некогерентно и среднее значение излучаемого потока в единице объема есть $N\langle \Phi \rangle$. С другой стороны, энергия падаю-

щего монохроматического излучения, проходящего через единицу поверхности в единицу времени, дается выражением

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_m^2,$$

Отсюда находим

$$\frac{N \langle \Phi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \frac{N \omega^4 e^4}{6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2 \omega^2]}. \quad (8)$$

2. Если $\omega_0^2 \gg \omega^2$, выражение (8) сводится к следующему:

$$\frac{N \langle \Phi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \frac{N \omega^4 e^4}{6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 \omega_0^4} = \frac{16 \pi^3 e^4 N}{6 \epsilon_0^2 m_e^2 \omega_0^4} \cdot \frac{1}{\lambda^4}, \quad (9)$$

так как $\omega = 2\pi c/\lambda$. Видно, что интенсивность рассеяния, при прочих равных условиях, пропорциональна λ^{-4} .

Для $N = 10^{28} \text{ м}^{-3}$, $\omega/\omega_0 = 0,1$ и отношение (8) имеет значение

$$\frac{N \langle \Phi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \frac{10^{28} \cdot (1,60 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 10^{-4} \cdot (36\pi \cdot 10^9)^2}{6\pi \cdot (3 \cdot 10^8)^4 \cdot (9,1 \cdot 10^{-31})^2} = 6,63 \cdot 10^{-5}.$$

Отношение интенсивностей рассеяния голубого и красного света равно $(\lambda_{\text{кр}}/\lambda_{\text{г}})^4$, если $\langle \epsilon \rangle$ для них имеет одинаковое значение, так что

$$\left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda_{\text{г}}} \right) = \left(\frac{7000}{4000} \right)^4 = 9,38.$$

3. Если $\omega_0^2 \ll \omega^2$, что имеет место для рентгеновских лучей, и поскольку в рассеянии участвуют все Z электронов атома, в единице объема содержится NZ осцилляторов и (8) принимает вид

$$\frac{N \langle \Phi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \frac{NZ e^4}{6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2} = 3,3 \cdot 10^{-33} NZ. \quad (10)$$

Для $^{64}_{29}\text{Cu}$:

$$\frac{N \langle \Phi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = 3,3 \cdot 10^{-33} \cdot 8 \cdot 10^{28} \cdot 29 = 7,65 \cdot 10^{-4}.$$

Для $^{207}_{82}\text{Pb}$:

$$\frac{N \langle \Phi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = 3,3 \cdot 10^{-33} \cdot 3 \cdot 10^{28} \cdot 82 = 8,12 \cdot 10^{-4}.$$

Эти два значения почти равны. Если находят коэффициент рассеяния единицей массы путем деления выражения (10) на плотность ρ рассматриваемого элемента объема, причем $\rho = NA/\mathfrak{N}$ (где A — атомная масса, а $\mathfrak{N}$ — число Авогадро), то отношение

$$\frac{N \langle \Phi \rangle}{\rho \langle \mathcal{E} \rangle} = \frac{\mathfrak{N} \langle \Phi \rangle}{A \langle \mathcal{E} \rangle} = 3,3 \cdot 10^{-33} \mathfrak{N} \frac{Z}{A} \quad (11)$$

зависит только от отношения Z/A атомного номера к атомной массе рассматриваемого элемента. Это отношение равно 0,453 для Си и 0,395 для Рб. Для легких элементов оно близко к 0,5, так что массовый коэффициент рассеяния для рентгеновских лучей является величиной постоянной. Эта закономерность, однако, выполняется только для средней области рентгеновского спектра.

III

1. Уравнение Максвелла для проводника с омическим сопротивлением

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Тогда можно записать уравнение распространения электрического поля, изменяющегося вдоль оси Oy и распространяющегося в направлении Ox :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right); \quad (12)$$

решение его является гармонической функцией времени. В этом случае

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega \mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}$$

и (12) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \left(\varepsilon - j \frac{\gamma}{\omega} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Это соотношение имеет вид уравнения волны в вакууме

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial s^2},$$

но электрическая постоянная ε_0 заменена здесь комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon - j \frac{\gamma}{\omega} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - \frac{j\gamma}{\varepsilon_0 \omega} \right); \quad (13)$$

ε_r — действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости, а $\gamma/\varepsilon_0 \omega$ — ее мнимая часть.

2. При наших допущениях уравнение (6) движения электрона в металле приводится к виду

$$m_e \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + g \frac{dy}{dt} \right) = -e E_m \sin \omega t. \quad (14)$$

Его решение:

$$y_m = \frac{-eE}{m_e(-\omega^2 + jg\omega)}.$$

Находим, как в II, 1, индуцированный момент $\mathbf{p}$, затем электрическую поляризацию среды $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ и, наконец, относительную диэлектрическую проницаемость по формуле

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0 \mathbf{E}}.$$

Тогда

$$\epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega} \cdot \frac{1}{jg - \omega}. \quad (15)$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_r = \epsilon'_r + j\epsilon''_r$ имеет действительную часть

$$\epsilon'_r = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \cdot \frac{1}{g^2 + \omega^2} \quad (16)$$

и мнимую часть

$$\epsilon''_r = \frac{Ne^2 g}{\epsilon_0 m_e \omega} \cdot \frac{1}{g^2 + \omega^2}. \quad (17)$$

а) При $g \gg \omega$ выражения (16) и (17) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \epsilon'_r &= 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e g^2}, \\ \epsilon''_r &= \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega g}. \end{aligned}$$

Сравнение последнего выражения с (13) показывает, что

$$\frac{\gamma}{\epsilon_0 \omega} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \omega m_e g},$$

и это позволяет найти g как функцию γ :

$$g = \frac{Ne^2}{m_e \gamma}; \quad (18)$$

ее величина не зависит от ω .

б) При $g \ll \omega$ выражение для дисперсии (15) принимает вид

$$\epsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{Ne^2 \lambda^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e}. \quad (19)$$

Это выражение обращается в нуль при такой длине волны λ_0 , что

$$\lambda_0^2 = \frac{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e}{Ne^2}. \quad (20)$$

При $\lambda > \lambda_0$ диэлектрическая проницаемость металла является комплексной величиной и характеризует его поглощательную способность. При $\lambda < \lambda_0$ диэлектрическая проницаемость представляет собой действительную величину, меньшую единицы. Металл становится прозрачным.

3. Выражение (19) можно переписать, принимая во внимание (20):

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}.$$

Коэффициент отражения при нормальном падении определяется формулой

$$R = \left(\frac{\sqrt{\epsilon_r} - 1}{\sqrt{\epsilon_r} + 1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\lambda_0^2 - \lambda^2} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2 - \lambda^2} + \lambda_0} \right)^2.$$

При $\lambda^2 \ll \lambda_0^2$ $R \approx 0$,

При $\lambda^2 \gg \lambda_0^2$ $R \approx 1$.

Последнее выражение хорошо выполняется для сильно поглощающих тел.

4. Интенсивность осциллятора или сила осциллятора f — это то число, на которое надо умножить второй член в теоретическом дисперсионном соотношении, чтобы получить согласие с экспериментальными значениями. Выражение (19) принимает вид

$$\epsilon_r = 1 - \frac{Ne^2\lambda^2 f}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e},$$

и, учитывая (20), получаем

$$f = \frac{1}{N\lambda_0^2} \cdot \frac{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e}{e^2}. \quad (21)$$

Тогда

$$\frac{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e}{e^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{-16} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (1,60 \cdot 10^{-19})^2} = 11,15 \cdot 10^{14}.$$

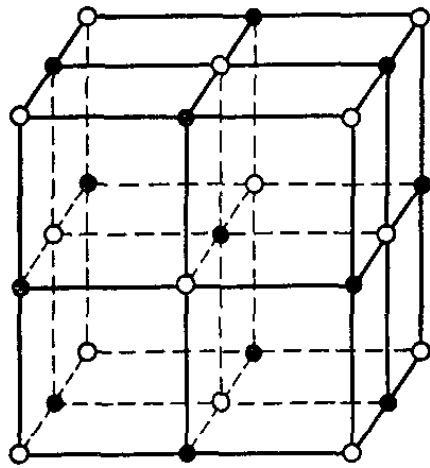
Величины, заданные в задаче, позволяют рассчитать произведения $N\lambda_0^2$, а следовательно, и значения f (21). Находим их:

Металл	Cs	Rb	K	Na	Li
$N\lambda_0^2 \cdot 10^{14}$	16,45	14,25	12,89	11,02	18,90
f	0,68	0,78	0,86 ₅	1,02	0,59

ЗАДАЧА 52

Дисперсия и отражение ионных кристаллов в инфракрасной области спектра

Рассмотрите двойной кристалл типа NaCl, образованный ионами Na^+ и Cl^- , расположенными в узлах кубической решетки, которая предполагается бесконечной (фиг. 52.1). Тепло-



● Na^+ ○ Cl^-

Фиг. 52.1

вое движение, кроме всего прочего, вызывает колебания, при которых две ионные подрешетки смещаются как целое друг относительно друга. Предположите, что взаимодействие соседних ионов (имеющее место на близких расстояниях) можно представить вблизи положения равновесия с помощью упругой возвращающей силы с коэффициентом k_0 . Относительные смещения ионов создают электрический дипольный момент в каждой ячейке решетки. Кристалл приобретает однородную поляризацию P , что приводит к возникновению электрического поля E , одинакового внутри кристал-

ла; при этом на каждый ион действует дополнительная (дальнодействующая) сила.

I

1. Покажите, что, если u есть относительное смещение положительных и отрицательных ионов с зарядом $\pm e$ и приведенной массой μ , уравнение движения имеет вид

$$\mu \frac{d^2 u}{dt^2} = -k_0 u + eE \quad (1)$$

и что поляризация P определяется уравнением

$$P = \frac{1}{V} [(\alpha_+ + \alpha_-) E + eu], \quad (2)$$

где α_+ и α_- — поляризуемости ионов, а V — объем, содержащий пару ионов.

Прежде всего вспомните определение электрического смещения D в изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r :

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_0 E + P. \quad (3)$$

2. Решением уравнения (1) является гармоническое движение с угловой частотой ω . Эта угловая частота принимает значение ω_r , если имеют место лишь короткодействующие взаимодействия.

Найдите дисперсионное выражение $\epsilon_r(\omega)$ из уравнений (1), (2) и (3). Покажите, что оно может быть записано в виде

$$n^2 = \epsilon_r = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 - (\omega/\omega_t)^2}, \quad (4)$$

где ϵ_s — относительная диэлектрическая проницаемость для электростатического поля ($\omega \rightarrow 0$), а ϵ_∞ — относительная диэлектрическая проницаемость для высоких частот ($\omega \gg \omega_t$).

Изобразите кривую $\epsilon_r(\omega)$. Пусть ω_1 — частота, для которой $\epsilon_r = 0$. Найдите соотношение ω_1/ω_t как функцию ϵ_s и ϵ_∞ .

II

Нарисуйте кривую зависимости коэффициента отражения R от ω при нормальном падении света на кристалл.

Пусть ω_r — частота, для которой $R = 0$. Найдите соотношение между ω_r , ω_t , ϵ_s и ϵ_∞ .

Приложение: для NaCl экспериментально найдены такие значения; $\lambda_r = 31$ мкм, $\lambda_t = 61,1$ мкм, $\epsilon_s = 5,62$ и $\epsilon_\infty = 2,25$.

С какой точностью выполняется предыдущее соотношение?

III

Экспериментальные кривые $\epsilon_r(\omega)$ и $R(\omega)$ значительно отличаются от теоретических кривых, найденных в разд. I и II. В частности, ϵ_r остается конечной величиной при $\omega = \omega_t$, и имеется максимальное значение R , меньшее единицы, при определенной частоте ω_m . Чтобы интерпретировать эти результаты, в уравнение движения (1) введите член, учитывающий тормозящую силу $-\gamma du/dt$. Что произойдет с этим уравнением, имеющим периодическое комплексное решение? Что произойдет с уравнением (4)? Предположите, что отношение $\gamma/\omega t$ мало и рассмотрите, как это влияет на кривую $R(\omega)$.

Хэвлок показал, что это выражение стремится к виду

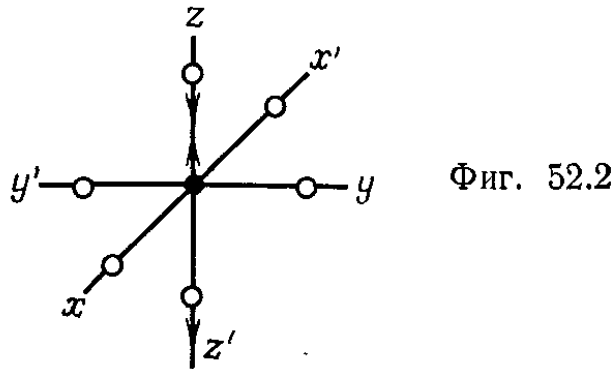
$$\frac{\omega_m}{\omega_t} = \left(1 + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{6\epsilon_\infty - 4}\right)^{1/2}. \quad (5)$$

С помощью этого выражения найдите λ_m для NaCl и сравните ее с экспериментальным значением, равным 52 мкм.

РЕШЕНИЕ

I

1. В рассматриваемом кубическом кристалле одно и то же уравнение описывает движение вдоль направления любой из осей куба $x'x$, $y'y$ или $z'z$ (фиг. 52.2). Из-за кубической симметрии кристалла коэффициент k_0 одинаков для любого направ-



ления перемещения. Уравнения движения обоих видов ионов имеют вид

$$m_+ \frac{d^2 u_+}{dt^2} = -k_0(u_+ - u_-) + eE \quad \text{и} \quad m_- \frac{d^2 u_-}{dt^2} = -k_0(u_- - u_+) - eE.$$

Умножая эти уравнения поочередно на m_- и m_+ , затем вычитая одно из другого и разделив полученный результат на $m_+ + m_-$, получаем уравнение (1). Дипольные моменты, обусловленные двумя видами ионов, равны соответственно.

$$eu_+ + \alpha_+ E \quad \text{и} \quad -eu_- + \alpha_- E.$$

Первый член соответствует смещению иона, а второй — его деформации. Поскольку в единице объема содержится $1/V$ пар ионов, поляризацию P можно получить умножением суммы дипольных моментов на $1/V$, после чего и придем к уравнению (2).

2. Гармоническое решение уравнения (1):

$$-\omega^2 u = -\frac{k_0}{\mu} u + \frac{e}{\mu} E.$$

Если поле E равно нулю, т. е. если нет дальнедействующего взаимодействия, это уравнение приводится к виду

$$-\omega^2 u = -\frac{k_0}{\mu} u = -\omega_t^2 u,$$

отсюда

$$\frac{u}{E} = \frac{e}{\mu} \frac{1}{\omega_t^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

Диэлектрическая проницаемость ϵ_r получается из соотношения (3), так что, используя (2), находим

$$\epsilon_r = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 V} = 1 + \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{\epsilon_0 V} + \frac{e}{\epsilon_0 V} \frac{u}{E}. \quad (7)$$

Ионы слишком тяжелы, чтобы следовать за полем в случае оптических частот, и поэтому в уравнении (7) надо учесть только первые два члена:

$$\epsilon_\infty = 1 + \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{\epsilon_0 V}. \quad (8)$$

В электростатическом поле E_s ($\omega = 0$) уравнение (7) принимает вид

$$\frac{u}{E_0} = \frac{e}{m\omega_t^2},$$

откуда

$$\epsilon_s = 1 + \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{\epsilon_0 V} + \frac{e^2}{\epsilon_0 V} = \epsilon_\infty + \frac{e^2}{\epsilon_0 V}. \quad (9)$$

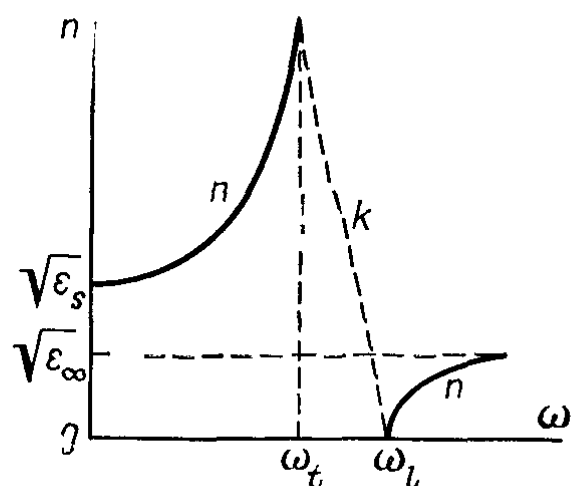
Из (7), (8) и (9) получаем дисперсионное соотношение (4)

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 - (\omega/\omega_t)^2}.$$

При $\omega = \omega_t$ получаем $\epsilon_r = \infty$. Значение ϵ_r положительно при $0 < \omega < \omega_t$ [второй член в правой части (4) при этом положителен] и при $\omega_l < \omega$, где ω_l такое значение ω , что при ее увеличении второй член является отрицательной величиной, меньшей чем ϵ_∞ по абсолютной величине. Тогда ω_l соответствует $\epsilon_r = 0$, так что

$$\omega_l = \omega_t \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\epsilon_\infty}}. \quad (10)$$

Показатель преломления $\mathbf{n} = \sqrt{\epsilon_r}$ является, таким образом, комплексной величиной: $\mathbf{n} = n - jk$; n — вещественный показатель преломления, а k — коэффициент поглощения; n принимает действительные значения при частотах, меньших ω_t и больших ω_l . Между этими пределами значения, принимаемые n , чисто мнимые (фиг. 52.3).



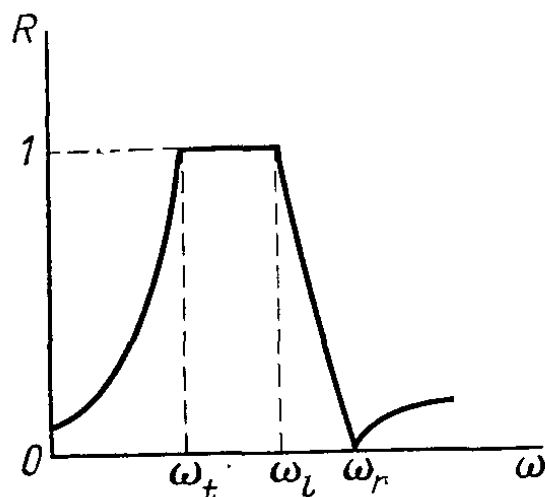
Фиг. 52.3

II

Коэффициент отражения при нормальном падении можно получить с помощью обобщенной формулы Френеля

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}. \quad (11)$$

Между значениями ω_t и ω_l , где n — чисто мнимая величина, $R = k^2/k^2 = 1$ (фиг. 52.4) и имеет место полное отражение.



Фиг. 52.4

R становится исчезающе малым при $n = 1$, или $\epsilon_r = 1$, так что для данной частоты ω_r , используя (4), получаем

$$\left(\frac{\omega_r}{\omega_t} \right)^2 = \frac{\epsilon_s - 1}{\epsilon_\infty - 1}. \quad (12)$$

Приложение. $\lambda = 2\pi c/\omega$, поэтому

$$\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_r} \right)^2 = \left(\frac{\omega_r}{\omega_t} \right)^2 = \left(\frac{61,1}{31} \right)^2 = 3,88.$$

С другой стороны,

$$\frac{\epsilon_s - 1}{\epsilon_\infty - 1} = \frac{4,62}{1,25} = 3,69.$$

Соотношение (12), таким образом, выполняется с точностью 5%.

III

Для гармонического решения, записанного в комплексной форме, уравнение движения

$$\mu \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} - k_0 \mu = eE$$

принимает вид

$$-\omega^2 u = \left(-\omega_t^2 + j \frac{\gamma}{\mu} \omega \right) u + \frac{e}{\mu} E.$$

Теперь достаточно заменить ω_t^2 на $\omega_t^2 + (j\gamma/\mu)\omega$ в расчетах ко второй части этой задачи, чтобы получить вместо (4) дисперсионное соотношение

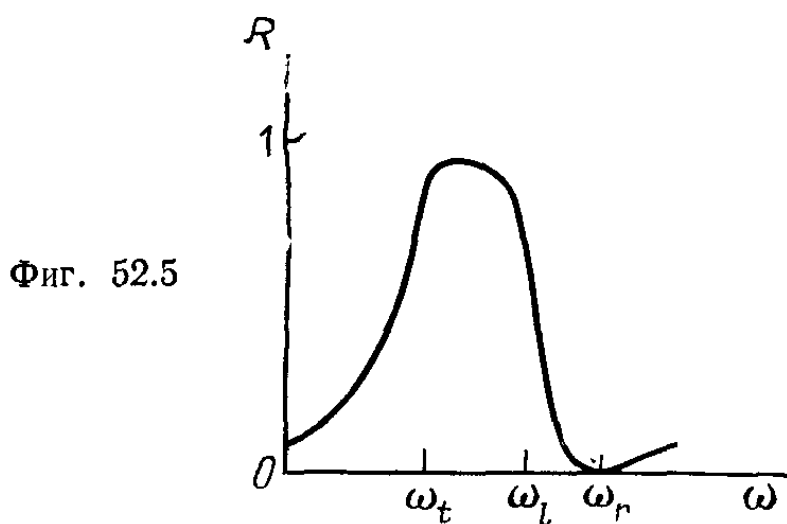
$$\begin{aligned} n^2 = (n - jk)^2 = \epsilon_r = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 - (\omega/\omega_t)^2 + (j\gamma/\mu\omega_t)(\omega/\omega_t)} = \\ = \epsilon_\infty + \frac{A}{\omega_t^2 - \omega^2 + j(\gamma/\mu)\omega}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $A = (\epsilon_s - \epsilon_\infty)\omega_t^2$ является константой. Разделяя действительную и мнимую части комплексного показателя преломления в (13), находим

$$n^2 - k^2 = \epsilon_\infty + \frac{A(\omega_t^2 - \omega^2)}{(\omega_t^2 - \omega^2)^2 + (\gamma^2/\mu^2)\omega^2},$$

$$2nk = \frac{A\gamma\omega}{(\omega_t^2 - \omega^2)^2 + (\gamma^2/\mu^2)\omega^2}.$$

Видно, что благодаря наличию члена с γ , n^2 всегда принимает конечное значение и никогда не является мнимой величиной.



Кроме того, R всегда меньше единицы, т. е. отражение никогда не бывает полным. R достигает высоких значений (0,8—0,95) только между ω_t и ω_l (фиг. 52.5).

Приложение. При заданных численных значениях величин уравнение (5) имеет вид

$$\left(\frac{\omega_m}{\omega_t} \right)^2 = \left(\frac{61,1}{\lambda_m} \right)^2 = 1 + \frac{5,62 - 2,25}{6 \cdot 2,25 - 4} = 1,355,$$

откуда

$$\lambda_m = \frac{61,1}{\sqrt{1,355}} = 52,5 \text{ мкм.}$$

ЗАДАЧА 53

Пропускание поглощающей тонкой пленки

Рассчитайте коэффициент пропускания T поглощающей пленки с параллельными поверхностями при толщине пленки d и комплексном показателе преломления n . Пленка находится в воздухе, и на нее падает перпендикулярно поверхности плоская волна с частотой ω . Что происходит с выражением для T , когда толщина d намного меньше длины волны падающего излучения?

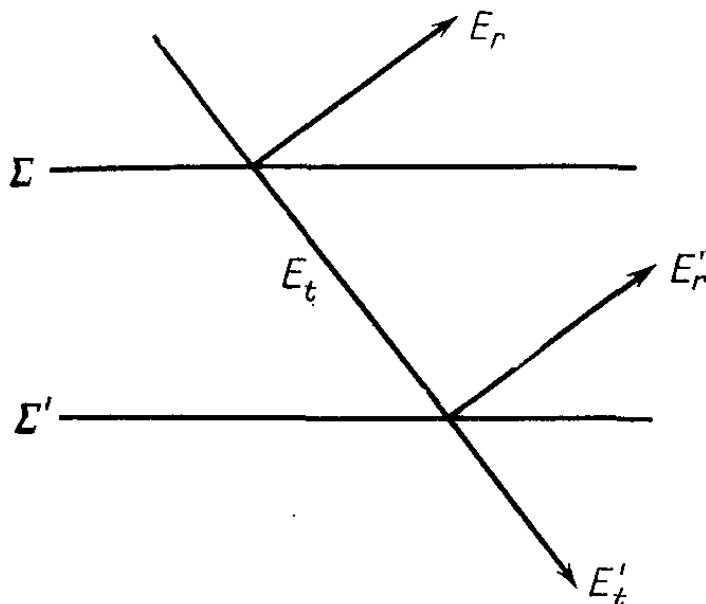
Если дисперсия показателя преломления может быть записана как

$$n^2 = n_0^2 + \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2 + jg\omega}$$

(ср. с задачей 49), покажите, что пропускание очень тонкой пленки имеет минимум при частоте ω_0 .

РЕШЕНИЕ

Пусть E_i — комплексная амплитуда электрического поля падающей волны (фиг. 53.1), E_r — амплитуда волны, отраженной



Фиг. 53.1

от первой поверхности Σ , E_t — амплитуда прошедшей волны, E'_r — амплитуда волны, отраженной от второй поверхности Σ' , и E'_t — амплитуда волны, пропущенной второй поверхностью.

На поверхности Σ' , где определяют начальные фазы, условие непрерывности для E имеет вид

$$E_t + E'_r = E'_t, \quad (1)$$

а для $H = (n/c\mu_0) E$

$$n(E_t - E'_r) = E'_t. \quad (2)$$

Подобным образом на поверхности Σ , учитывая толщину пленки, находим

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t \exp(-j\sigma nd) + \mathbf{E}'_r \exp(j\sigma nd) \quad (3)$$

и

$$\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r = n\mathbf{E}_t \exp(-j\sigma nd) - n\mathbf{E}'_r \exp(j\sigma nd). \quad (4)$$

Складывая почленно (1) и (2), находим

$$2\mathbf{E}'_t = (1 + n)\mathbf{E}_t + (1 - n)\mathbf{E}'_r.$$

Вычитая (2) из (1), получаем

$$(1 - n)\mathbf{E}_t = -(1 + n)\mathbf{E}'_r.$$

Складывая (3) и (4), имеем

$$2\mathbf{E}_t = (1 + n)\mathbf{E}_t \exp(-j\sigma nd) + (1 - n)\mathbf{E}'_r \exp(j\sigma nd).$$

Отсюда

$$t = \frac{\mathbf{E}'_t}{\mathbf{E}_i} = \frac{(1 + n)\mathbf{E}_t + (1 - n)\mathbf{E}'_r}{(1 + n)\mathbf{E}_t \exp(-j\sigma nd) + (1 - n)\mathbf{E}'_r \exp(j\sigma nd)},$$

$$t = \frac{(1 + n)^2 - (1 - n)^2}{(1 + n)^2 \exp(j\sigma nd) - (1 - n)^2 \exp(j\sigma nd)}.$$

Если $d \ll \lambda$, то $\sigma d = 2\pi d/\lambda \ll 1$. Выделяя два первых члена в разложении экспоненты, получаем

$$t = \frac{4n}{4n - 2j\sigma nd(1 + n^2)} = \frac{1}{1 - (j\sigma d/2)(1 + n^2)}.$$

Коэффициент пропускания определяется следующим образом:

$$T = tt^* = \frac{1}{1 - (j\sigma d/2)(1 + n^2)} \cdot \frac{1}{1 + (j\sigma d/2)(1 + n^{*2})} = \frac{1}{1 + (j\sigma d/2)(n^{*2} - n^2)}$$

[в пренебрежении членами с $(\sigma d/2)^2$]. Величина T минимальна, когда $j\sigma d(n^{*2} - n^2)$ принимает максимальное значение. Если теперь

$$n^2 = n_0^2 + \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2 + jg\omega}$$

и так как $\sigma = \omega/c$,

$$j\sigma(n^{*2} - n^2) = \frac{2gA}{c} \cdot \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + g^2\omega^2}.$$

Производная

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + g^2\omega^2} \right] = \frac{2\omega(\omega^2 + \omega_0^2)(\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + g^2\omega^2]^2}$$

действительно обращается в нуль при $\omega = \omega_0$.

ЗАДАЧА 54

Электромагнитные волны в плазме

Атмосферный газ состоит из положительных и отрицательных ионов и содержит в единице объема N ионов с зарядом $+e$ и массой M и N ионов с зарядом $-e$ и массой m_0 .

I

Пренебрегая влиянием нейтральных молекул, найдите:

1. Выражение для относительной диэлектрической проницаемости такой среды для электромагнитных волн с частотой ν . Покажите, что роль положительных ионов незначительна, поскольку масса M во много раз больше массы m_0 .

2. Фазовую скорость v_ϕ электромагнитных волн с частотой ν , если магнитная проницаемость среды равна единице. Минимальное значение частоты ν_c , для которого v_ϕ является действительной величиной.

3. Соотношение между фазовой скоростью v_ϕ , групповой скоростью v_g волн в такой среде и скоростью c волн, распространяющихся в вакууме.

4. Радиус кривизны траектории электромагнитных волн, распространяющихся в направлении, перпендикулярном вертикали, если принять, что в атмосферных газах при увеличении высоты на 100 м относительная величина N убывает на 6% и что частота рассматриваемых волн $\nu = 2\nu_c$. Определите направление кривизны траектории.

II

1. Пространство разделено бесконечной плоскостью на две половины, в одной из которых (1) находится описанный выше ионизированный газ, а во второй (2) такой же газ, но свободный от ионов. Определите значение коэффициента отражения энергии (при перпендикулярном падении) для волн с частотой $\nu = 2\nu_c$.

2. Каков должен быть угол падения для тех же волн, падающих на поверхность раздела при заданной ориентации электрического вектора падающих волн, чтобы колебания электрического вектора отраженных волн были перпендикулярны плоскости падения?

Рассмотрите оба случая, когда волны распространяются в направлении от (1) к (2) и от (2) к (1).

Численные значения: $N = 1,226 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ (заданы также значения e , m_e и c).

РЕШЕНИЕ

I

1. Уравнения движения ионов имеют вид

$$m_0 \frac{d^2 s}{dt^2} = -eE_m \sin \omega t, \quad M \frac{d^2 S}{dt^2} = eE_m \sin \omega t,$$

$$s = \frac{eE_m}{m_0 \omega^2} \sin \omega t, \quad S = \frac{eE_m}{M \omega^2} \sin \omega t,$$

где s и S имеют противоположные направления. Так как $S/s = m_0/M$, то S пренебрежимо мало по сравнению с s , если m_0 мало по сравнению с M .

Диэлектрическая проницаемость тогда равна

$$\epsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0 \omega^2} = 1 - \frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_0 v^2},$$

$$\epsilon_r = 1 - \frac{1,226 \cdot 10^{12} \cdot 2,56 \cdot 10^{-38} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} v^2} = 1 - \frac{10^{14}}{v^2}.$$

2. Фазовая скорость v_ϕ связана со скоростью света в вакууме соотношением

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (Ne^2/4\pi^2 \epsilon_0 m_0 v^2)}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (10^{14}/v^2)}}.$$

Чтобы v_ϕ имело действительное значение, подкоренное выражение должно быть положительным, так что

$$\frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_0 v^2} < 1.$$

Частота ν должна тогда иметь значение, большее граничной частоты ν_c , определяемой соотношением

$$\nu_c = \sqrt{\frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_0}} = 10^7.$$

Тогда можно записать

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\nu_c^2}{\nu^2}.$$

3. Соотношение между групповой v_g и фазовой v_ϕ скоростями может быть записано как

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{v_\phi} \right) = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\nu}{v_\phi} \right) = \frac{1}{c} \frac{d(n\nu)}{d\nu} = \frac{1}{c} \frac{d(\nu \sqrt{\epsilon_r})}{d\nu},$$

так что

$$\begin{aligned}\frac{c}{v_g} &= \frac{d}{dv} \left(v \sqrt{1 - \frac{v_c^2}{v^2}} \right) = \frac{d(\sqrt{v^2 - v_c^2})}{dv} = \\ &= \frac{v}{\sqrt{v^2 - v_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_c^2/v^2)}} = \sqrt{\epsilon_r} = \frac{v_\phi}{c}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_g \cdot v_\phi = c^2.$$

4. Кривизна линии, вдоль которой распространяется фронт волны, определяется выражением

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} &= -\frac{1}{n} \frac{dn}{dz} = -\frac{1}{2n^2} \frac{d(n^2)}{dz} = -\frac{1}{2\epsilon_r} \frac{d\epsilon_r}{dz}, \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{2\epsilon_r} \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e v^2} \cdot \frac{dN}{dz} = \frac{1}{2\epsilon_r} \cdot \frac{v_c^2}{N v^2} \cdot \frac{dN}{dz}.\end{aligned}$$

Для $v = 2v_c$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{8\epsilon_r} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dz},$$

и при $\epsilon_r = 1 - 1/4 = 3/4$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dz} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10^4} = 10^{-4} \text{ м}^{-1}, \quad \rho = 10^4 \text{ м}.$$

В то время как N уменьшается при увеличении высоты, ϵ_r — увеличивается и $d\epsilon_r/dz$ положительно. Траектория изгибается вниз.

II

1. Коэффициент отражения энергии при нормальном падении имеет вид

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\epsilon_r}-1}{\sqrt{\epsilon_r}+1} \right)^2$$

для любого направления распространения

$$R = \left(\frac{\sqrt{0,75}-1}{\sqrt{0,75}+1} \right)^2 = \left(\frac{0,866-1}{0,866+1} \right)^2 = \left(\frac{-0,134}{1,866} \right)^2 = (-0,073)^2 = 53 \cdot 10^{-4}.$$

2. Искомый угол — это угол Брюстера i_B , который определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} i_B = n = \sqrt{\epsilon_r} = 0,866.$$

Для волн, распространяющихся в ионизированной среде,

$$i_B = 40^\circ 54'.$$

При распространении в противоположном направлении

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} i'_B &= \frac{1}{n} = \operatorname{ctg} i_B, \\ i'_B &= 49^\circ 6' .\end{aligned}$$

ЗАДАЧА 55

Колебания плазмы

I

Покажите, что в изотропной среде решения уравнения Максвелла имеют вид продольных плоских волн, то есть плоских волн, у которых электрический вектор $\mathbf{E}$ параллелен волновому вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Каким условиям должен удовлетворять показатель преломления среды, чтобы эти волны могли распространяться в ней?

II

Выведите уравнение, определяющее показатель преломления плазмы для монохроматической волны. Пренебрегите столкновениями ионов и электронов. Покажите, что ионным вкладом в поляризацию вообще можно пренебречь. При каких условиях в плазме устанавливаются продольные колебания электрического поля? Определите фазовую и групповую скорости соответствующих волн.

РЕШЕНИЕ

I

Уравнения Максвелла для плоской монохроматической волны с угловой частотой ω :

$$\mathbf{E} \times \boldsymbol{\sigma} = -\mu_0 \omega \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\mathbf{H} \times \boldsymbol{\sigma} = \omega \mathbf{D}. \quad (2)$$

$\mathbf{D}$ — вектор смещения, связанный с $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (3)$$

так что относительная диэлектрическая проницаемость ε_r и поляризация среды $\mathbf{P}$ связаны соотношением

$$\mathbf{P} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (4)$$

Условие существования продольной волны, $\mathbf{E} \parallel \boldsymbol{\sigma}$, приводит, в соответствии с (1), к равенству $\mathbf{H} = 0$. Поэтому из (2) следует, что

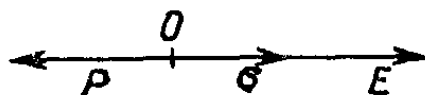
$\mathbf{D} = 0$, и из (3)

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = -\mathbf{P}. \quad (5)$$

Направления векторов σ , $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ указаны на фиг. 55.1. Уравнение (5) при подстановке в (4) приводит к

$$\epsilon_r = 0. \quad (6)$$

Чтобы могли существовать продольные электромагнитные волны,



Фиг. 55.1

согласно уравнениям Максвелла, показатель преломления среды $n = \sqrt{\epsilon_r}$ должен обращаться в нуль.

II

Столкновениями ионов и электронов можно пренебречь, если рассматривать их как свободные частицы. При таком условии смещение s одной частицы с массой m_i и зарядом (алгебраическая величина) e_i определяется уравнением

$$m_i \frac{d^2 s}{dt^2} = e_i E_m \sin \omega t.$$

Этому соответствует электрический дипольный момент

$$d = es = \frac{e^2}{m\omega^2} E_m \sin \omega t.$$

Поляризация среды, обусловленная этими заряженными частицами, при наличии N невзаимодействующих частиц в единице объема равна $P = Nd$. Из уравнения (4) получаем

$$\epsilon_r = 1 - \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m_e \omega^2} - \sum_i \frac{e_i^2 N_i}{\epsilon_0 m_i \omega^2}. \quad (7)$$

Здесь N_e и m_e относятся к электронам, N_i , e_i и m_i — к положительным или отрицательным ионам. Суммирование производится по всем ионам. Поскольку плазма нейтральна, концентрация положительных ионов равна сумме концентраций отрицательных ионов и электронов. Член в уравнении (7), относящийся к ионам, пренебрежимо мал, поскольку массы ионов во много раз больше

массы электрона. Принимая это во внимание, найдем, что условие (6) выполняется, если

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m_e}}. \quad (8)$$

Это выражение показывает, что ω не зависит от σ . Кроме того, фазовая скорость $v_\phi = \omega/\sigma$ не подчиняется соотношениям, выведенным при изучении волн. Групповая скорость $v_g = d\omega/d\sigma$ равна нулю. Видим, что здесь имеют место колебания электрического поля и электронов, а не волны в их обычном понимании.

ЗАДАЧА 56

Электромагнитные волны и волны де Бройля

I

Рассмотрите поток частиц с массой покоя m_0 , движущихся в вакууме прямолинейно с постоянной скоростью u .

1. Пусть все частицы имеют одну и ту же скорость. Обозначив энергию частиц через W , а импульс через p , напишите выражение для волны де Бройля, связанной с частицами. Напишите выражение для фазовой скорости v_ϕ через W и p . Выразите также v_ϕ как функцию u и c — скорости света в вакууме.

2. Представьте, что имеет место некоторое распределение скоростей вблизи значения u , вид которого неизвестен. Можно ли записать выражение для волны де Бройля? Покажите, что групповую скорость v_g можно выразить в общем виде как

$$v_g = \frac{dW}{dp}.$$

Представьте v_g как функцию средней скорости частиц u . Каково соотношение между фазовой и групповой скоростями?

3. Частицы представляют собой электроны, скорость которых u такова, что длина связанных с ними волн λ равна половине комптоновской длины волны λ_c .

Вычислите: а) их скорость u ; б) фазовую и групповую скорости связанных с ними волн; в) массу m ; г) разность потенциалов V , необходимую для достижения этой скорости, если предположить, что электроны испускаются горячим катодом с нулевой начальной скоростью.

Комптоновская длина волны $\lambda_c = 2h/m_0c$.

II

Замените поток частиц потоком фотонов, имеющих такую же частоту ν , как волна де Бройля, связанная с частицами. Фотоны проходят через непоглощающую среду с показателем преломления n . Обозначьте через λ' и $\tilde{\nu}'$ соответственно длину волны и волновое число в среде.

1. Считая поток монохроматическим, выразите фазовую скорость v_ϕ как функцию ν и $\tilde{\nu}'$.

2. Поток фотонов не может быть строго монохроматическим. Покажите, что с помощью v и $\tilde{\nu}'$ групповую скорость фотонов v_g можно представить аналогично групповой скорости частиц в I, 2.

3. Каким должен быть дисперсионный закон для среды $n = f(\lambda)$, чтобы v_g и v_ϕ были связаны таким же соотношением, как в I, 2 для волн, связанных с частицами?

4. В какой области электромагнитного спектра мог бы выполняться такой дисперсионный закон для материальной среды? Покажите, что этот закон является предельным случаем общего закона дисперсии, справедливого для областей спектра, удаленных от полос поглощения:

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{A_i}{\tilde{\nu}_{0i}^2 - \tilde{\nu}_0^2},$$

где $\tilde{\nu}_0$ — волновое число в вакууме, $\tilde{\nu}_{0i}$ — волновое число, соответствующее центру полосы поглощения, и A_i — постоянная. Полосы поглощения находятся в видимой, инфракрасной и ближней ультрафиолетовой областях спектра.

РЕШЕНИЕ

I

1. Для частицы, движущейся равномерно и прямолинейно, импульс $p = mv$ является постоянной величиной. Энергия W также постоянна. Она является полностью кинетической, не считая энергии покоя, оценка которой требует применения теории относительности. Основные соотношения

$$W = h\nu, \quad (1)$$

$$p = h\tilde{\nu} \quad (2)$$

позволяют связать движение частицы с плоской гармонической волной

$$\Psi(x, t) = A \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (Wt - px) \right\}, \quad (3)$$

где A — постоянная, а x — направление движения волны. Отсюда длина волны

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Фазовая скорость определяется соотношением

$$v_\phi = \lambda\nu. \quad (4)$$

Для того чтобы выразить v_ϕ в виде функции u и c , необходимо взять для ν значение, соответствующее полной энергии, определяемой теорией относительности, а именно $W = mc^2$, где m —

инертная масса. Импульс p здесь равен mu , и (4) можно записать в виде

$$v_{\varphi} = \frac{h}{p} \cdot \frac{W}{h} = \frac{c^2}{u}. \quad (5)$$

2. Распределение скоростей частиц соответствует распределению их импульсов. Монохроматическая волна (3) заменяется группой волн:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) \exp \left\{ \frac{i}{h} (Wt - px) \right\} dp. \quad (6)$$

Это выражение показывает, что Ψ имеет максимум внутри области Δp , окружающей p . Максимальное значение Ψ достигается, когда фаза волны

$$\varphi = Wt - px$$

остаётся в этой области почти неизменной, то есть когда

$$\frac{d\varphi}{dp} = t \frac{dW}{dp} - x = 0.$$

Центр группы волн движется равномерно со скоростью, которая и является групповой скоростью

$$v_g = \frac{x}{t} = \frac{dW}{dp}. \quad (7)$$

Из теории относительности следует: $W^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$, откуда $WdW = t^2 p dp$, и из (5) следует, что

$$v_g = \frac{pc^2}{W} = \frac{c^2}{v_{\varphi}} = u. \quad (8)$$

Групповая скорость равна скорости частицы.

3. Длина волны для рассматриваемых электронов равна

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{2} = \frac{h}{m_0 c}.$$

Нерелятивистский расчет дает

$$u = \frac{p}{m} = \frac{h}{\lambda m_0} = c,$$

что является неприемлемым. Необходимо учитывать релятивистское изменение массы:

$$u = \frac{p}{m} = \frac{h}{\lambda m} = \frac{h \sqrt{1 - (u^2/c^2)}}{\lambda m_0} = c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

откуда

$$u = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Из (8) находим

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

а из (5)

$$v_\phi = c \sqrt{2}.$$

Масса электрона, имеющего скорость u , равна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = m_0 \sqrt{2}.$$

Его кинетическая энергия полностью определяется действием электростатических сил:

$$eV = W_k = (m - m_0) c^2 = 0,414 m_0 c^2,$$

откуда

$$V = 0,414 \frac{m_0 c^2}{e} = 0,414 \frac{0,9 \cdot 10^{-30}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 2,22 \cdot 10^4 \text{ В.}$$

II

1. По определению

$$v_\phi = \lambda' \nu = \frac{\nu}{\tilde{\nu}'},$$

2. С учетом основных соотношений (1) и (2) группа волн (6) может быть записана в виде

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{\nu}') \exp \{2\pi j (\nu t - \tilde{\nu}' x)\} d\tilde{\nu}', \quad (9)$$

что соответствует электромагнитным волнам. Те же рассуждения, которые проводились при получении (7) из (6), в этом случае дают

$$v_g = \frac{d\nu}{d\tilde{\nu}'}. \quad (10)$$

3. Из уравнений (5) и (8) следует, что

$$v_g \cdot v_\phi = c^2,$$

что с учетом (10) и $\tilde{\nu}' = \nu/v_\phi$ дает

$$\frac{1}{v_g} = \frac{v_\phi}{c^2} = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\nu}{v_\phi} \right),$$

или

$$\frac{\nu}{c^2} d\nu = \frac{\nu}{v_\phi} d \left(\frac{\nu}{v_\phi} \right) = \frac{1}{2} d \left(\frac{\nu}{v_\phi} \right)^2,$$

отсюда

$$\left(\frac{v}{v_\Phi}\right)^2 = \frac{v^2}{c^2} + K,$$

где K — положительная или отрицательная постоянная. Таким образом, окончательно

$$\frac{c^2}{v_\Phi^2} = n^2 = 1 + \frac{Kc^2}{v^2} = 1 + K\lambda_0^2,$$

где λ_0 — длина волны в вакууме.

4. Это уравнение согласуется с законом дисперсии, приведенным в тексте для $\tilde{v}_{0i}^2 \gg \tilde{v}_i^2$; в результате имеем

$$n^2 = 1 - \frac{\sum A_i}{\tilde{v}_{0i}^2}$$

или

$$n^2 = 1 - \lambda_0^2 \sum A_i.$$

Это выражение справедливо для рентгеновских лучей и для всех тех случаев, когда длина волны намного короче длин волн полос атомного или молекулярного поглощения.

ЗАДАЧА 57

Пять упражнений на соотношение неопределенности

I

С помощью интерферометра Майкельсона на первый взгляд кажется возможным определить, будет ли фотон, связанный с волновым пучком, отражаться от того или другого из двух зеркал интерферометра путем измерения отдачи зеркал. Используя соотношение неопределенности, покажите, что такое измерение несовместимо с сохранением когерентности интерферирующих волновых пучков.

РЕШЕНИЕ

Для сохранения когерентности необходимо, чтобы неопределенность в положении зеркал была намного меньше, чем длина волны света. Если $\Delta x \ll \lambda$, соответствующий импульс отдачи должен быть равен

$$\Delta p \approx \frac{h}{\Delta x} \gg \frac{h}{\lambda},$$

где h/λ — импульс фотона. Следовательно, такой опыт невозможен.

II

Исходя из мысленного эксперимента по измерению положения с помощью «микроскопа Гейзенберга», установите коротковолновый предел при измерениях длины, определяемый соотношением $W = h\nu$.

РЕШЕНИЕ

Использование излучения с длиной волны λ_0 позволяет измерить минимальную длину порядка $\Delta l \approx \lambda_0/2 \sin u$ с помощью микроскопа с численной апертурой $\sin u$. Нижний предел λ_l используемых для этого длин волн λ соответствует собственной энергии частицы m_0c^2 . Таким образом,

$$\frac{hc}{\lambda_l} = m_0c^2,$$

где λ_l — комптоновская длина волны для случая, когда частица является электроном

$$\lambda_l = \frac{h}{m_ec} = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Для более тяжелых частиц, таких, как атомные ядра, предельные значения уменьшаются, но только до величины порядка 10^{-15} м. Измерение длин, намного меньших этой величины, не имеет физического смысла ¹⁾.

III

Согласно квантовой механике, гармонический осциллятор с массой m и частотой ν обладает в основном состоянии остаточной, «нулевой», энергией $W_0 = \frac{1}{2}h\nu$ с соответствующей нормированной собственной функцией

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi a^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2}\right),$$

где x — смещение от положения равновесия, а $a = \sqrt{h/4\pi^2\nu_0 m}$ — амплитуда колебаний. Вычислите среднее значение $\langle x \rangle$ и $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ и покажите, что если энергия имеет точное значение W_0 , то его можно получить из соотношения неопределенности $\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p_x)^2 \rangle \geq \hbar^2/4$.

¹⁾ L. Brillouin, Science and Information Theory, ch. 16.

РЕШЕНИЕ

Среднее значение x равно

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_0^2 dx = \sqrt{\frac{1}{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = 0,$$

так как это интеграл нечетной функции. Среднее квадратичное значение изменения x равно

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle,$$

поскольку $\langle x \rangle = 0$, то

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi_0^2 dx = \sqrt{\frac{1}{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx.$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle &= \sqrt{\frac{1}{\pi a^2}} \left[-\frac{a^2}{2} x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{\pi a^2}} \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx. \end{aligned}$$

Первый член в правой части равен нулю, подобно (1). Значение интеграла равно $a \sqrt{\pi}$ и

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{a^2}{2} = \frac{h}{8\pi^2 v m}.$$

Выражение для энергии

$$W = \frac{p_x^2}{2m} + 2\pi^2 v^2 m x^2.$$

Если энергия определена точно, можно записать

$$W = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} + 2\pi^2 v^2 m \langle x^2 \rangle,$$

и, поскольку $\langle p \rangle = 0$,

$$W = \frac{\langle (\Delta p_x)^2 \rangle}{2m} + 2\pi^2 v^2 m \langle (\Delta x)^2 \rangle.$$

Соотношение неопределенности

$$\langle (\Delta p_x)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta x)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

дает

$$W \geq \frac{\hbar^2}{8m \langle (\Delta x)^2 \rangle} + 2\pi^2 v^2 m \langle (\Delta x)^2 \rangle.$$

Это выражение имеет минимум при

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{\hbar}{4\pi\nu m}.$$

Минимальное значение W_0 равно

$$W_0 = \hbar\pi\nu = \frac{h\nu}{2}.$$

IV

Исходя из соотношения неопределенности между импульсом частицы и соответствующей координатой, оцените энергию основного состояния атома водорода.

РЕШЕНИЕ

Энергия электрона на расстоянии r от ядра определяется уравнением

$$W = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Минимальная энергия получается при наименьших возможных значениях p и r . Однако, согласно требованиям соотношения неопределенности,

$$\Delta p \cdot \Delta r \approx \hbar.$$

Заметьте, что в записи этого выражения скорость является радиальной; вследствие этого говорят, что угловой момент электрона в основном состоянии равен нулю. Средние значения $\langle r \rangle$ и $\langle p \rangle$ не могут быть меньше Δr и Δp соответственно. Таким образом, для минимальных средних значений имеем

$$\langle r \rangle \cdot \langle p \rangle \approx \hbar,$$

так что

$$\langle W \rangle = \frac{\hbar^2}{2m_e \langle r^2 \rangle} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle}.$$

Это уравнение имеет минимум при

$$\langle r \rangle = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2}.$$

Это значение радиуса первой боровской орбиты или наиболее вероятное расстояние электрона от ядра. Минимальное значение энергии равно

$$W_0 = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2}.$$

V

Предположим, что нужно измерить магнитный момент M , обусловленный спином электрона, путем измерения магнитного поля H , которое он индуцирует на расстоянии r . Чтобы этот эксперимент имел смысл, мы должны иметь возможность локализовать электрон в области $\Delta r \ll r$. Необходимо также, чтобы магнитное поле H' , обусловленное движением электрона (со скоростью v), было пренебрежимо мало по сравнению с полем H . Покажите, что эти условия не совместимы с соотношениями неопределенности.

РЕШЕНИЕ

Максимальная величина поля H выражается (в А/м) следующим образом:

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{M}{r^3}.$$

Максимальная величина поля, обусловленного движением электрона, равна

$$H' = \frac{1}{4\pi} \frac{ev}{r^2}.$$

Кроме того, известно, что M равно магнетону Бора, так что

$$M = \frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Условие $H \gg H'$ ведет к тому, что

$$\hbar \gg 2pr, \quad (1)$$

где $p = m_e v$. Соотношение неопределенности дает

$$\Delta r \cdot \Delta p \approx \hbar,$$

что при $\Delta r \ll r$ приводит к

$$\hbar \ll r \Delta p,$$

то есть к неравенству, противоречащему (1).

ЗАДАЧА 58

Потенциальный барьер

Поток частиц с одинаковой скоростью, с массой m и постоянной полной энергией W , двигаясь от x' к x , встречает потенциальный барьер шириной d .

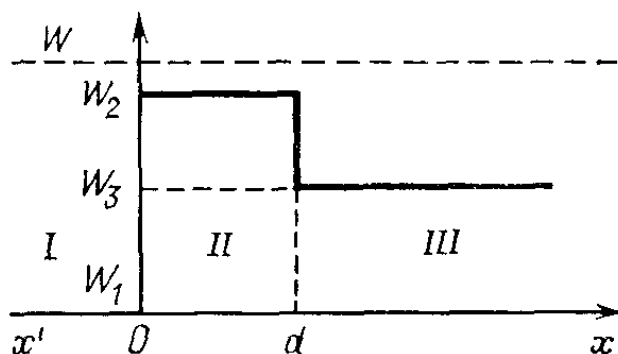
I

Поперечное сечение барьера показано на фиг. 58.1:

$$\begin{aligned} W_p &= W_1 = 0 & \text{для } x < 0, \\ W_p &= W_2 & \text{для } 0 < x < d, \\ W_p &= W_3 & \text{для } x > d. \end{aligned}$$

Запишите условия непрерывности для волновой функции, связанной с этими частицами, и для ее первой производной. Получите коэффициент пропускания T потенциального барьера (отношение прошедшего потока к падающему) как функцию d и

Фиг. 58.1

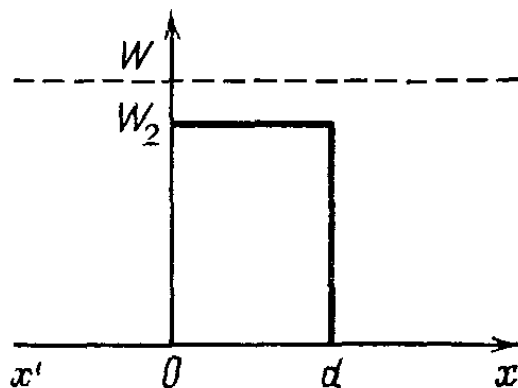


волновых векторов σ_1 , σ_2 и σ_3 , соответствующих областям I , II и III . Считайте, что W больше W_p . (Начальная энергия частиц является чисто кинетической.)

II

Рассмотрите частный случай, когда $W_3 = W_1$ и $W > W_p$ (фиг. 58.2). Получите коэффициент пропускания T для этого

Фиг. 58.2



барьера как функцию коэффициента отражения R_1 в точке разрыва потенциала O . Проведите аналогию между этим выражением и выражением для пропускания электромагнитных волн, падающих на стеклянную пластинку с плоскопараллельными поверхностями. Считайте, что показатель преломления пластинки равен n_2 и что она находится в однородной среде с показателем преломления n_1 .

III

Используя описанный выше потенциальный барьер, рассмотрите случай $W < W_p$. Вычислите T , если $W = 1$ эВ, $W_2 = 2$ эВ и $d = 1$ Å для электронов и протонов.

РЕШЕНИЕ

Асимметричный барьер

I

Записываем уравнение Шредингера для области I:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \sigma_1^2\psi = 0, \quad \text{где} \quad \sigma_1 = \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar}; \quad (1)$$

для области II:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \sigma_2^2\psi = 0, \quad \text{где} \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{2m(W - W_2)}}{\hbar}; \quad (2)$$

для области III:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \sigma_3^2\psi = 0, \quad \text{где} \quad \sigma_3 = \frac{\sqrt{2m(W - W_3)}}{\hbar}. \quad (3)$$

В области I и II имеются прямая и отраженная волны. В области III, которая, по предположению, тянется до бесконечности, имеется только прямая волна.

Решения уравнения Шредингера соответственно для этих трех областей имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_I &= e^{-i\sigma_1 x} + re^{+i\sigma_1 x}, \\ \psi_{II} &= Ae^{-i\sigma_2 x} + Be^{+i\sigma_2 x}, \\ \psi_{III} &= te^{-i\sigma_3 x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вспомните вывод условий непрерывности. Функция ψ , квадрат которой является мерой плотности вероятности для частиц в некоторой точке вдоль направления $x'x$, может иметь в этой точке лишь единственное значение. Кроме того, поскольку величины энергий W_2 и W_3 конечны, уравнения (1)–(3) показывают, что вторая производная ψ также конечна. Таким образом, первая производная непрерывна. Уравнения непрерывности в плоскости $x = 0$ записываются в виде

$$\begin{aligned} 1 + r &= A + B, \\ \sigma_1(1 - r) &= \sigma_2(A - B) \end{aligned} \quad (5)$$

и в плоскости $x = d^1)$

$$\begin{aligned} A \exp(-j\sigma_2 d) + B \exp(j\sigma_2 d) &= t \exp(-j\sigma_3 d), \\ \sigma_2 [A \exp(-j\sigma_2 d) - B \exp(j\sigma_2 d)] &= t\sigma_3 \exp(-j\sigma_3 d). \end{aligned} \quad (6)$$

В задаче 14 уже решалась подобная система уравнений. Достаточно заменить t на $t \exp(-j\sigma_3 d)$ в уравнении (25), а в правой части q_0 , q и q_s на σ_1 , σ_2 и σ_3 , а также k_0 на σ_2 .

Беря модуль этого выражения, получаем коэффициент пропускания для барьера:

$$T = \frac{4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3}{\sigma_2^2(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)\sin^2\sigma_2 d}. \quad (7)$$

Замечание. Полезно показать соответствие некоторых результатов физической и квантовой оптики, полученных в задачах 14 и 58.

Диэлектрическая пленка

Записываются условия непрерывности для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей.

Потенциальный барьер

Записываются условия непрерывности для волновой функции частицы и для ее первой производной.

В результате получаются одинаковые уравнения:

$$\begin{aligned} \text{уравнения (18) и (22)} &\leftrightarrow \text{уравнение (5),} \\ \text{уравнения (19) и (23)} &\leftrightarrow \text{уравнение (6).} \end{aligned}$$

Различные среды характеризуются своими показателями преломления $(n_0, n_1, \dots)$ и, следовательно, различными длинами электромагнитных волн $(\lambda_0 = c/n_0, \lambda_1 = c/n_1, \dots)$.

Различные области характеризуются своей потенциальной энергией $W_p(x)$ и, следовательно, различными длинами волн, связанных с частицами, и соответствующими волновыми числами:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\sqrt{2m(W - W_1)}}{\hbar}, \\ \sigma_2, \dots \end{aligned}$$

¹⁾ В правой части надо писать экспоненту, а не t , как это было в случае с тонкой пленкой [уравнение (12), задача 14]. Только при этом условии коэффициент σ_3 входит во второе уравнение (6). В дальнейшем при расчете T экспоненту $\exp(-j\sigma_3 d)$ перестают учитывать.

II

$W > W_2$, $\sigma = \sigma_3$.

Уравнение для T упрощается к виду

$$T = \frac{1}{1 + [(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 / 4\sigma_1^2\sigma_2^2] \sin^2 \sigma_2 d}. \quad (8)$$

С другой стороны, коэффициент отражения в точке O получается на основе уравнения, которое можно записать как

$$r = \frac{1 - \sqrt{(W - W_2)/W}}{1 + \sqrt{(W - W_2)/W}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad (9)$$

откуда следует

$$R_1 = r^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2. \quad (10)$$

Коэффициент пропускания потенциального барьера

$$T = \frac{1}{1 + [4R_1/(1 - R_1)^2] \sin^2 \sigma_2 d}. \quad (11)$$

Замечания.

1. Коэффициент пропускания тонкой пластинки имеет такой же вид. Действительно, если в уравнении (31) в задаче 14 принять $q_0 = q_s$ или $n_0 = n_s = n_1$, то можно записать

$$T = \frac{1}{1 + [(n_2^2 - n_1^2)^2 / 4n_1^2 n_2^2] \sin^2 \sigma_2 d}. \quad (12)$$

Формула Френеля позволяет записать соотношение

$$R_1 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad (13)$$

и уравнения (11) и (12) становятся идентичными.

2. Потенциальный барьер, подобно диэлектрической пластинке, совершенно прозрачен, когда $\sin \sigma_2 d = 0$ или $d = \lambda_2/2$. Следствием этого квантового эффекта является эффект Рамзауэра.

Электронный пучок с энергией приблизительно 0,1 эВ проходит через инертный газ (неон или аргон), как если бы на его пути не было никаких атомов. При этой энергии атомы оказываются для электронов практически прозрачными. Когда энергия электронов больше или меньше этой величины, они рассеиваются вдоль своего пути.

III

$W < W_2$, $\sigma_1 = \sigma_3$ (фиг. 58.2).

Запишем решения уравнения Шредингера

$$\begin{aligned}\psi_I &= e^{-j\sigma_1 x} + r e^{+j\sigma_1 x}, \\ \psi_{II} &= A e^{-\sigma_2 x} + B e^{+\sigma_2 x}, \\ \psi_{III} &= t e^{-j\sigma_1 x}.\end{aligned}\quad (14)$$

Уравнения (5) и (6) принимают вид

$$(1 + r) = A + B, \quad (15)$$

$$j\sigma_1(1 - r) = \sigma_2(A - B);$$

$$A e^{-\sigma_2 d} + B e^{+\sigma_2 d} = t e^{-j\sigma_1 d}, \quad (16)$$

$$\sigma_2 [A e^{-\sigma_2 d} - B e^{+\sigma_2 d}] = j\sigma_1 t e^{-j\sigma_1 d}.$$

Решение этих уравнений имеет вид [достаточно заменить $j\sigma_2$ на σ_2 в уравнении (6)]

$$t = \frac{4j\sigma_1\sigma_2 e^{-j\sigma_1 d}}{(\sigma_2 + j\sigma_1)^2 e^{-\sigma_2 d} - (\sigma_2 - j\sigma_1)^2 e^{\sigma_2 d}}. \quad (17)$$

Поскольку внешние среды идентичны, получаем (учитывая, что $2 \operatorname{sh} x = e^x - e^{-x}$ и $j \sin x = \operatorname{sh} jx$)

$$T = |t|^2 = \frac{4\sigma_1^2\sigma_2^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 \operatorname{sh}^2 \sigma_2 d}. \quad (18)$$

Численный пример:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \rightarrow T = \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2 \sigma_2 d},$$

$$\sigma_2 d = \frac{\sqrt{2m(W_0 - W)}}{\hbar} d.$$

Для электрона

$$\sigma_2 d = \frac{2 \cdot 3,14 \sqrt{2 \cdot 0,9 \cdot 10^{-30} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}}{6,62 \cdot 10^{-34}} 10^{-10},$$

$$\sigma_2 d = 0,51, \quad \operatorname{sh} \sigma_2 d = 0,53,$$

$$T = \frac{1}{1 + (0,53)^2} = \frac{1}{1 + 0,28},$$

$$T = 0,77,$$

$$R = 0,23.$$

Для протона $m = 1840m_e$, $\sigma_2 d = 22$, а член $\exp(\sigma_2 d)$, появляющийся в уравнении

$$\operatorname{sh} \sigma_2 d = \frac{1}{2} [\exp(\sigma_2 d) - \exp(-\sigma_2 d)],$$

имеет порядок 10^{10} . Следовательно, $T \approx 0$.

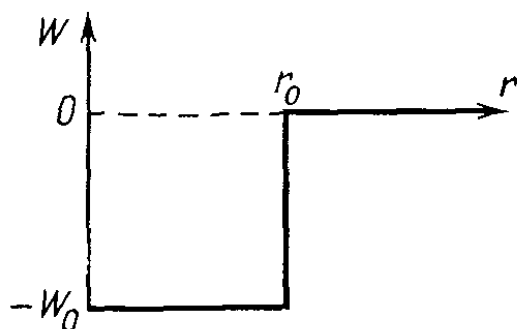
ЗАДАЧА 59

Дейтрон

Ядро дейтерия (тяжелый водород), называемое дейтроном, состоит из протона и нейтрона, связанных друг с другом силой притяжения, обусловленной центральным потенциалом $W_p(r)$. Считайте, что массы протона и нейтрона одинаковы (это верно с точностью до 0,007) и равны $1,672 \cdot 10^{-27}$ кг.

1. Напишите уравнение Шредингера, независимое от времени, для дейтрона в системе координат, связанной с центром масс.

2. Напишите радиальное волновое уравнение для случая, когда нейтрон находится в сферически-симметричном состоянии.



Фиг. 59.1

3. Эксперимент показывает, что, когда дейтрон находится в основном состоянии, абсолютная величина энергии связи $|W| = 2,23$ МэВ. Определите знак энергии и поясните его смысл. Считайте, что энергию взаимодействия $W_p(r)$ в первом приближении можно представить с помощью прямоугольной потенциальной ямы, у которой $W_p(r) = -W_0$ для $r < r_0$ и $W_p(r) = 0$ для $r > r_0$ (фиг. 59.1). Принимая, что основное состояние является сферически-симметричным, определите соответствующую волновую функцию (которая должна вместе со своей первой производной быть однородной, непрерывной и ограниченной).

Считайте, что в волновом уравнении $r\psi_r(r) = u(r)$.

4. Вычислите радиус r_0 потенциальной ямы, характеризующий длину ядерного взаимодействия, для $W_0 = 21$ МэВ (для r_0 выбирается наименьшее возможное значение).

5. Вычислите вероятность того, что r больше или меньше r_0 .

РЕШЕНИЕ

1. Система эквивалентна частице с массой $\mu = m/2$. Независимое от времени уравнение Шредингера имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{m}{\hbar^2} [W - W_p(r)]\psi = 0. \quad (1)$$

2. В сферически-симметричном состоянии (S -состоянии), $\psi = \text{const} \cdot \psi_r(r)$. Лапласиан имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi_r}{dr} \right),$$

а волновое уравнение

$$\frac{d^3\psi_r}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d\psi_r}{dr} + \frac{m}{\hbar^2} [W - W_p(r)] \psi_r = 0. \quad (2)$$

3. Энергия связи определяется разностью между энергией двухкомпонентной системы и энергией составляющих компонент в состоянии покоя при их бесконечном удалении друг от друга. Следовательно, она отрицательна, так как протон и нейтрон притягиваются друг к другу. Значение энергии основного состояния $W = -2,23$ МэВ есть собственное значение уравнения Шредингера для этого состояния.

Принимая $r\psi_r = u(r)$, имеем

$$\frac{d\psi_r}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}, \quad \frac{d^2\psi_r}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r^3},$$

и уравнение (2) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} [W - W_p] \frac{u}{r} = 0. \quad (3)$$

При $r > r_0$ имеем $W_p = 0$ и решение уравнения (3) является экспонентой (так как $W < 0$), так что

$$u(r) = A \exp(-Kr) + B \exp(Kr), \quad \text{где} \quad K = \frac{\sqrt{m|W|}}{\hbar}.$$

B равно нулю, так как $r^{-1} \exp(Kr)$ не ограничено в бесконечности.

При $r < r_0$ имеем $W_p < W$; энергия W равна сумме кинетической и потенциальной (не нулевой) энергии. Решение уравнения (3) является гармоническим:

$$u(r) = C \cos K'r + D \sin K'r, \quad \text{где} \quad K' = \frac{\sqrt{m(W_0 - |W|)}}{\hbar}.$$

C равно нулю, поскольку $r^{-1} \exp(K'r)$ не ограничена в начале координат. Синусоидальное решение оказывается справедливым, поскольку при $r \rightarrow 0$

$$\frac{1}{r} \sin K'r \rightarrow K' \quad \text{и} \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{\sin K'r}{r} \right) \rightarrow 0.$$

Используя условия непрерывности для u и du/dr при $r = r_0$, получаем

$$\begin{aligned} D \sin K'r_0 &= A \exp(-Kr_0), \\ DK' \cos K'r_0 &= -AK \exp(-Kr_0), \end{aligned} \quad (4)$$

откуда

$$K' \operatorname{ctg} K' r_0 = -K \quad (5)$$

или

$$\sqrt{W_0 - |W|} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{m(W_0 - |W|)}}{\hbar} r_0 = -\sqrt{|W|}. \quad (6)$$

4. При $|W| = 2,23$ МэВ и $W_0 = 21$ МэВ имеем

$$K' = \frac{2 \cdot 3,14 \sqrt{1,672 \cdot 10^{-27} \cdot 2,23 \cdot 10^6 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 2,32 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-1},$$

$$K' = K \sqrt{\frac{W_0 - |W|}{|W|}} = 2,32 \cdot 10^{14} \sqrt{\frac{18,77}{2,23}} = 6,72 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-1}.$$

Используя (5), находим

$$\operatorname{ctg} K' r_0 = -0,345,$$

$$K' r = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 0,345 = \frac{\pi}{2} + 0,332 + n\pi \quad (n - \text{целое число}).$$

Наименьшее значение r_0 равно

$$r_0 = \frac{1,571 + 0,332}{6,72 \cdot 10^{14}} = 2,83 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

5. Вероятность того, что расстояние между протоном и нейтроном превышает r_0 , находится следующим образом:

$$P = \int_{r_0}^{\infty} |\psi|^2 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int_{r_0}^{\infty} \exp(-2Kr) dr = \frac{2\pi A^2}{K} \exp(-2Kr_0).$$

Вероятность, что это расстояние меньше r_0 , равна

$$P' = \int_0^{r_0} |\psi|^2 4\pi r^2 dr = 4\pi D^2 \int_0^{r_0} \sin^2 K' r dr = \frac{2\pi D^2}{K'} \left(K' r_0 - \frac{1}{2} \sin^2 K' r_0 \right).$$

Отношение этих двух величин при учете (4) равно

$$\frac{P}{P'} = \frac{K'}{K} \frac{A^2}{D^2} \frac{\exp(-2Kr_0)}{K' r_0 - \frac{1}{2} \sin^2 K' r_0} = \frac{K'}{K} \frac{\sin^2 K' r_0}{K' r_0 - \frac{1}{2} \sin^2 K' r_0}.$$

Имеем $K' r_0 = 1,903$, $\sin K' r_0 = 0,945$, $\sin 2K' r_0 = -0,615$ и $P/P' = 1,17$.

Поскольку $P + P' = 1$, $P = 0,54$ и $P' = 0,46$.

В основном состоянии дейтрона протон и нейтрон большую часть времени проводят вне области действия ядерных сил. Это объясняется небольшим значением связывающей силы W .

ЗАДАЧА 60

Двойная потенциальная яма

I

Частица с массой m может двигаться вдоль направления Ox в области, где потенциальная энергия принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} x < 0, & \quad W = \infty, \\ 0 < x < a, & \quad W = 0 \quad (\text{область } I), \\ a < x < a + b, & \quad W = W_0 \quad (\text{область } II), \\ a + b < x < 2a + b, & \quad W = 0 \quad (\text{область } III), \\ 2a + b < x, & \quad W = \infty. \end{aligned}$$

1. Покажите, что волновая функция частицы может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A \sin \sigma x, \\ \psi_2 &= B e^{\sigma' (x - a - b)} + C e^{-\sigma' (x - a)}, \\ \psi_3 &= D \sin \sigma [x - (2a + b)] \end{aligned}$$

в областях I , II и III соответственно.

Чему равны значения σ и σ' , когда энергия частиц W меньше чем W_0 ?

2. Напишите условия непрерывности волновой функции для разных стенок ямы. Какие соотношения можно получить между A и D , с одной стороны, и B и C — с другой?

3. Пользуясь этими соотношениями, напишите уравнение, определяющее возможные значения энергии частицы W в виде

$$\operatorname{tg} \sigma a = f(\sigma, \sigma'). \quad (1)$$

При достаточно большой величине b (насколько большой?) это уравнение можно записать в более простой форме

$$\operatorname{tg} \sigma a = f_0(\sigma, \sigma'). \quad (2)$$

Решите его графически, пользуясь следующими численными значениями:

$$\begin{aligned} a &= 0,4 \text{ \AA}, & h &= 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}, \\ W_0 &= 0,20 \text{ эВ}, & e &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \\ m &= 5 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, & b &\text{измеряется в \AA}. \end{aligned}$$

Получите возможные значения W .

II

Предположите теперь, что b мало. Покажите, что (1) может быть приближенно записано в виде

$$\operatorname{tg} \sigma a = f_0(\sigma, \sigma')(1 \pm 2\eta), \quad (3)$$

где η — малая величина, зависящая от b . Покажите, что имеет место расщепление уровней, определенных в I, 3.

При каком значении b интервал этого расщепления для первого уровня составит $0,8 \text{ см}^{-1}$? Какова при этом величина расщепления в см^{-1} для второго уровня?

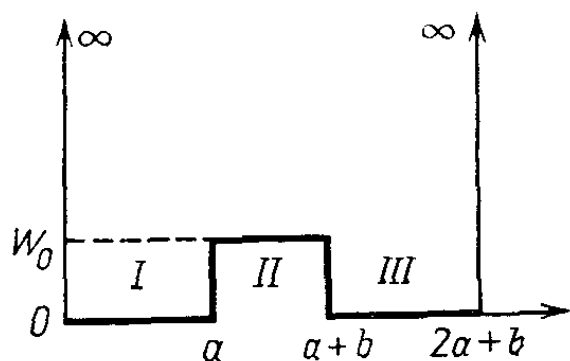
III

Величина расщепления, приведенная в предыдущем вопросе, относится к случаю инверсии в молекуле NH_3 . Покажите количественно, что изменится для молекул ND_3 (необходимо взять двойное значение m) и для PH_3 (нужно утроить значение W_0).

РЕШЕНИЕ

I

1. Поскольку энергия W частицы меньше высоты W_0 потенциального барьера, частица, согласно классической теории, может пребывать только в области I или в области III. Согласно



Фиг. 60.1

квантовой теории, она не может существовать в левой области I или в правой области III, но может переходить из I в III или из III в I (фиг. 60.1). Волновое уравнение для стационарных состояний в областях I или III, где $W_p = 0$, имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + W \psi = 0.$$

Его решение является гармоническим, и ψ должно стремиться к нулю при $x = 0$ и при $x = 2a + b$. Следовательно,

$$\psi_1 = A \sin \sigma x,$$

$$\psi_3 = D \sin \sigma [x - (2a + b)],$$

где $\sigma = \sqrt{2mW}/\hbar$. В области II волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (W - W_p) \psi = 0.$$

Поскольку $W < W_p$, решение этого уравнения является гармоническим в области между $x = a$ и $x = a + b$, так что

$$\psi_2 = B \exp(\sigma' x) + C \exp(-\sigma' x),$$

где

$$\sigma' = \frac{\sqrt{2m(W_0 - W)}}{\hbar}.$$

2. Условия непрерывности для ψ и $\partial\psi/\partial x$ получаются в виде для $x = a$:

$$A \sin \sigma a = B \exp(\sigma' a) + C \exp(-\sigma' a),$$

$$\sigma A \cos \sigma a = \sigma' [B \exp(\sigma' a) - C \exp(-\sigma' a)];$$

для $x = a + b$:

$$B \exp[\sigma'(a + b)] + C \exp[-\sigma'(a + b)] = D \sin \sigma a,$$

$$\sigma' \{B \exp[\sigma'(a + b)] - C \exp[-\sigma'(a + b)]\} = -D \sigma \cos \sigma a.$$

3. Путем исключения B и C из четырех написанных выше уравнений находим

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma} \operatorname{tg} \sigma a + 1\right) A \exp(\sigma' b) = \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \operatorname{tg} \sigma a - 1\right) D,$$

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma} \operatorname{tg} \sigma a - 1\right) A \exp(-\sigma' b) = \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \operatorname{tg} \sigma a + 1\right) D.$$

Эти два уравнения совместимы при условии

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma} \operatorname{tg} \sigma a + 1\right) \exp(\sigma' b) = \pm \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \operatorname{tg} \sigma a - 1\right),$$

откуда

$$\operatorname{tg} \sigma a = -\frac{\sigma}{\sigma'} \left\{ \frac{1 \pm \exp(-\sigma' b)}{1 \mp \exp(-\sigma' b)} \right\}. \quad (1)$$

Это и есть искомое общее соотношение. Если b достаточно велико, так что $\sigma' b$ намного больше единицы, уравнение (1) упрощается и принимает вид

$$\operatorname{tg} \sigma a = -\frac{\sigma}{\sigma'} [1 \pm 2 \exp(-\sigma' b)]. \quad (2)$$

В первом приближении не будем учитывать экспоненту, которая мала по сравнению с единицей, и тогда получим, что

$$\operatorname{tg} \sigma a = -\frac{\sigma}{\sigma'} \quad (3)$$

и не зависит от b .

Уравнение (3) можно записать в виде

$$\sigma a = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sigma}{\sigma'} \right) + k\pi \quad (k - \text{целое число}).$$

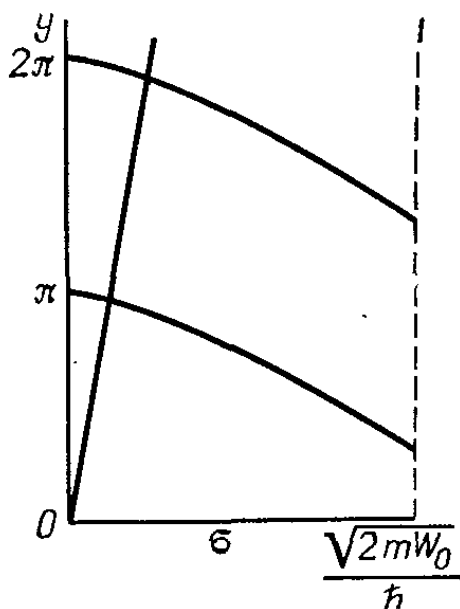
Поскольку

$$\sin \sigma a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \sigma a}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}} = \frac{\hbar \sigma}{\sqrt{2mW_0}},$$

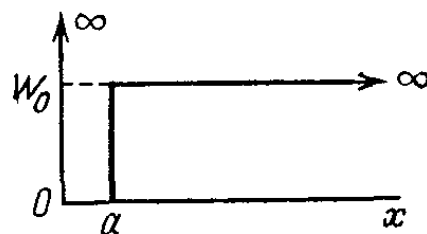
окончательно имеем

$$\sigma a = k\pi - \arcsin \frac{\hbar \sigma}{\sqrt{2mW_0}}. \quad (4)$$

Это трансцендентное уравнение, которое определяет σ , а тем самым и W , можно решить графически путем нахождения



Фиг. 60.2



Фиг. 60.3

пересечения линии $y = \sigma a$ с кривой (фиг. 60.2)

$$y = k\pi - \arcsin \frac{\hbar \sigma}{\sqrt{2mW_0}}.$$

Как видим, энергия является квантованной. Когда $W \ll W_0$, то есть когда $\sigma \ll \sigma'$, уравнения (3) и (4) имеют решение

$$\sigma a = k\pi,$$

и значения энергии

$$W^{(0)} = \frac{k^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (5)$$

Снова получены энергетические уровни для частицы в потенциальном ящике, что вполне естественно, поскольку малость величины W по сравнению с W_0 эквивалентна заключению интервалов a между бесконечными потенциальными стенками.

При заданных численных значениях энергетические уровни (5) имеют значения

$$W^{(0)} = \frac{k^2 \hbar^2}{8ma^2} = k^2 \frac{43,56 \cdot 10^{-68}}{8 \cdot 5 \cdot 10^{-27} \cdot 0,16 \cdot 10^{-20}} = k^2 \cdot 6,82 \cdot 10^{-22} \text{ Дж},$$

в то время как

$$W_0 = 0,20 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,2 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

Таким образом, сделанное приближение $W \ll W_0$ является неплохим. Лучшее приближение достигается с помощью (3). Так как член с правой стороны мал, можно принять

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{(0)} - \frac{\sigma^{(0)}}{\sigma'^{(0)}_a}, \quad (6)$$

откуда

$$W^{(1)} = \frac{\hbar^2 \sigma^{(1)2}}{2m} = \frac{\hbar^2 \sigma^{(0)2}}{2m} - \frac{2\hbar^2 \sigma^{(0)} \sigma'^{(0)}}{2m \sigma'^{(0)}_a} = W^{(0)} - \frac{2W^{(0)}}{\sigma'^{(0)}_a}.$$

Это выражение соответствует потенциальной кривой на фиг. 60.3, для которой $W_p = \infty$ при $x = 0$ и которая имеет бесконечную ширину барьера высотой W_0 .

II

Уравнение (2) записано в конкретной для этой задачи форме. Считая, что σa мало, можно сделать такое же приближение, как и в (6):

$$\sigma^{(2)} = \sigma^{(1)} \mp 2 \frac{\sigma^{(0)}}{\sigma'^{(0)}_a} \exp(-\sigma'^{(0)} b), \quad (7)$$

откуда

$$W^{(2)} = W^{(1)} \mp \frac{4W^{(0)}}{\sigma'^{(0)}_a} \exp(-\sigma'^{(0)} b). \quad (8)$$

Последний член определяет расщепление энергетических уровней. Величина расщепления первого уровня ($k=1$) равна

$$\Delta W_1^{(2)} = \frac{8W_1^{(0)}}{\sigma'^{(0)}_a} \exp(-\sigma'^{(0)} b). \quad (9)$$

При

$$\Delta W_1^{(2)} = \hbar c \Delta \tilde{\nu}, \quad \text{где} \quad \Delta \tilde{\nu} = 0,8 \cdot 10^2 \text{ м}^{-1},$$

необходимо, чтобы

$$\exp(-\sigma'^{(0)} b) = \frac{\sigma'^{(0)} a \hbar c \Delta \tilde{\nu}}{8W_1^{(0)}} = \frac{\sqrt{2m(W_0 - W_1^{(0)})} 2\pi a \hbar c \Delta \tilde{\nu}}{8\pi W_1^{(0)}},$$

$$\exp(-\sigma'^{(0)} b) = \frac{\sqrt{3,2 \cdot 10^{-46} \cdot 3,14 \cdot 0,4 \cdot 10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0,8 \cdot 10^2}}{4 \cdot 6,82 \cdot 10^{-22}} =$$

$$= 1,98 \cdot 10^{-2},$$

откуда

$$\sigma'^{(0)}b = 3,92.$$

Поскольку

$$\sigma'^{(0)} = \frac{\sqrt{3,2 \cdot 10^{-46} \cdot 6,28}}{6,6 \cdot 10^{-34}} = 1,7 \cdot 10^{11},$$

имеем

$$b = \frac{3,92}{1,7} \cdot 10^{-11} = 2,3 \cdot 10^{-11} \text{ м или } 0,23 \text{ \AA}.$$

Расщепление второго уровня равно

$$\Delta W_2 = \frac{8W_2^{(0)}}{\sigma'^{(0)}a} \exp(-\sigma'^{(0)}b).$$

$W_2^{(0)}$ имеет малую величину по сравнению с W_0 .

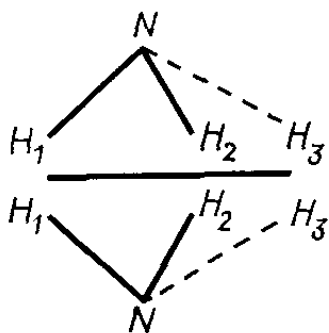
Поскольку

$$W_2^{(0)} = k^2 W_1^{(0)} = 4W_1^{(0)},$$

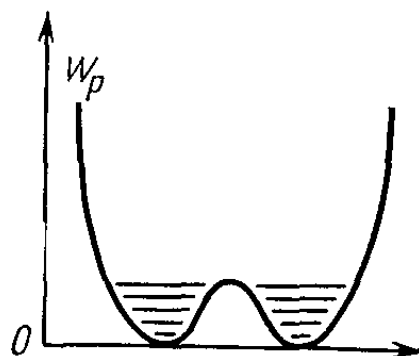
расщепление второго уровня в четыре раза больше, чем первого, и составляет $3,2 \text{ см}^{-1}$.

III

Молекула NH_3 имеет форму пирамиды с треугольным основанием. Если атомы Н пронумеровать, можно видеть (фиг. 60.4), что при инверсии относительно центра масс новую молекулу уже нельзя совместить с исходной посредством поворота или



Фиг. 60.4



Фиг. 60.5

перемещения. Это приводит к двум различным молекулярным модификациям и к двум одинаковым минимумам энергии для двух разных положений атома N относительно плоскости, в которой располагаются атомы водорода. Таким образом, в этой задаче рассматривается общий случай с более точной потенциальной кривой, приведенной на фиг. 60.5. Однако ее трудно решить. Принятое выше значение $0,8 \text{ см}^{-1}$ для расщепления первого энергетического уровня как раз равно найденному для NH_3 . Наблюдаемый между этими уровнями переход является дипольным, и с ним связано поглощение при $\lambda = 1,25 \text{ см}$.

Для ND_3 форма потенциальной кривой такая же, как для NH_3 . Если происходит удвоение значения m , значение $\sigma^{(0)}$ умножается на $\sqrt{2}$, а $W_1^{(0)}$ делится на 2. Значение $-\sigma'^{(0)}b$ изменяется от 3,92 до $3,92 \cdot \sqrt{2} = 5,04$ и $\exp(-\sigma'^{(0)}b) = 0,64 \cdot 10^{-2}$. Уравнение (9) показывает, что значение $\Delta\sigma$ делится приблизительно на 9.

Для PH_3 предполагаем, что ширина барьера b остается неизменной, но высота W_0 умножается на 3, тогда значение $\sigma'^{(0)}$ умножается на $\sqrt{3}$ и $\exp(-\sigma'^{(0)}b) = 0,11 \cdot 10^{-2}$, а уравнение (9), где изменяется только $\sigma'^{(0)}$, показывает, что значение $\Delta\sigma$ уменьшается приблизительно на 0,03 по сравнению со значением для NH_3 . Полный расчет затруднителен.

ЗАДАЧА 61

Операторы углового момента

Одноэлектронная волновая функция для состояния $l = 2$, $m = 2$ записывается в виде

$$\psi_{n22} = cf(r) \sin^2 \theta \exp(2j\varphi),$$

где c — постоянная. Функция $f(r)$, являющаяся радиальной частью волновой функции, зависит от главного квантового числа n и не является существенной в этом случае. Покажите, что ψ_{n22} является собственной функцией операторов $\hat{G}_z$ и $\hat{G}^2$, а не операторов $\hat{G}_x$ и $\hat{G}_y$ ($\hat{G}$ — угловой момент).

РЕШЕНИЕ

1. Оператор $\hat{G}_z$ можно записать в виде $-j\hbar(\partial/\partial\varphi)$, откуда

$$\hat{G}_z \psi_{n22} = -j\hbar \frac{\partial \psi_{n22}}{\partial \varphi} = -j\hbar 2j \psi_{n22} = 2\hbar \psi_{n22}.$$

Таким образом, ψ_{n22} является собственной функцией $\hat{G}_z$ с собственным значением $2\hbar$.

2. Оператор $\hat{G}^2$ определяется формулой

$$\hat{G}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 \psi_{n22}}{\partial \varphi^2} = -4 \psi_{n22},$$

$$\frac{\partial \psi_{n22}}{\partial \theta} = 2cf(r) \sin \theta \cos \theta \exp(2j\varphi),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_{n22}}{\partial \theta} \right) = cf(r) \exp(2j\varphi) [4 \sin \theta \cos^2 \theta - 2 \sin^3 \theta],$$

$$\begin{aligned} \hat{G}^2 \psi_{n22} &= -\hbar^2 cf(r) \exp(2j\varphi) [4 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta - 4] = \\ &= \hbar^2 cf(r) \exp(2j\varphi) 6 \sin^2 \theta = 6\hbar^2 \psi_{n22}. \end{aligned}$$

Таким образом, ψ_{n22} есть собственная функция $\hat{G}^2$ с собственным значением $6\hbar^2$, которое должно быть равно $l(l+1)\hbar^2$ и, следовательно, должно иметь требуемое значение при $l=2$.

3. Оператор $\hat{G}_x$ определяется формулой

$$\hat{G}_x = -j\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

откуда

$$\hat{G}_x \psi_{n22} = -j\hbar (-2 \sin \varphi \sin \theta \cos \theta - 2j \operatorname{ctg} \theta \sin^2 \theta \cos \varphi) \psi_{n22}.$$

Правая часть этого уравнения не равна произведению константы на ψ_{n22} , следовательно, ψ_{n22} не является собственной функцией $\hat{G}_x$. Это справедливо и для $\hat{G}_y$.

ЗАДАЧА 62

Эффект Комптона

I

Монохроматический пучок γ -лучей падает на очень тонкую металлическую фольгу, находящуюся в вакууме в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Определите энергию, частоту и длину волны падающего излучения при следующих условиях: R — радиус кривизны траектории испускаемых электронов в плоскости, перпендикулярной полю $\mathbf{B}$; λ_K — длина волны, соответствующая работе выхода из металла; постоянные $\hbar$, c , m_e и e заданы. Релятивистскими поправками можно пренебречь.

Численные данные: $\mathbf{B} = 15 \cdot 10^{-4}$ Тл, $R = 0,10$ м, $\lambda_K = 0,15$ Å.

II

Монохроматические γ -лучи проходят через водород. Воспроизведите теорию эффекта Комптона с применением релятивистской механики. Рассчитайте длину волны фотона, рассеянного на угол $\theta = 90^\circ$ относительно направления Ox падающего пучка фотонов.

Вычислите кинетическую энергию W_K электронов, получивших импульс в направлении, составляющем угол φ с направлением падения Ox , как функцию отношения $\alpha = \lambda_K/\lambda$ (комптовская длина волны больше длины волны падающего фотона). Найдите соотношение между углами φ и θ . Покажите в полярной системе координат зависимость энергии рассеянного фотона и электрона отдачи от углов φ и θ .

РЕШЕНИЕ

I

Энергетический баланс для γ -фотона с частотой ν и длиной волны λ может быть записан в виде

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} = (\text{работа, требуемая для вырывания электрона}) + (\text{кинетическая энергия электрона}). \quad (1)$$

Энергия γ -кванта достаточна для ионизации атомов металла путем вырывания из них K -электронов, и в случае, когда это происходит, энергия, необходимая для удаления электронов из металла, пренебрежимо мала. Считая, что электрон подчиняется законам механики Ньютона, записываем уравнение (1) в виде

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_K} + \frac{1}{2} m v^2. \quad (2)$$

Скорость электрона v , имеющего заряд e и массу m_e , находится из радиуса кривизны R , которую имеет его траектория, перпендикулярная магнитному полю B :

$$v = \frac{eBR}{m_e} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-1}}{9 \cdot 10^{-31}} = 27 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Отсюда энергия фотона

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,15 \cdot 10^{-10}} + \frac{9}{2} \cdot 10^{-31} \cdot 729 \cdot 10^{12} = 165 \cdot 10^{-16} \text{ Дж};$$

его частота

$$\nu = \frac{W}{h} = \frac{165 \cdot 10^{-16}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 25 \cdot 10^{18} \text{ Гц};$$

его длина волны

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{25 \cdot 10^{18}} = 0,12 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,12 \text{ \AA}.$$

II

В релятивистской механике закон сохранения энергии при комптоновском рассеянии записывается в виде

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right), \quad (3)$$

где $\beta = v/c$ — отношение скорости электрона к скорости света. Сохранение импульсов вдоль осей Ox и Oy (фиг. 62.1) может

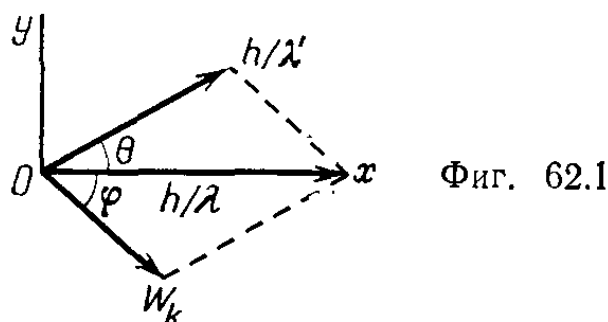
быть записано следующим образом:

$$\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \theta = \frac{m_e \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos \varphi, \quad (4)$$

$$\frac{h}{\lambda'} \sin \theta = \frac{m_e \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sin \varphi. \quad (5)$$

Исключая из уравнений (3) — (5) φ и скорость электрона βc , получаем для комптоновского смещения

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0,0485 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (6)$$



При $\theta = 90^\circ$

$$\lambda' = 0,12 + \frac{0,0485}{2} = 0,1443 \text{ \AA}.$$

Уравнение (6) можно записать в виде

$$\lambda' = \lambda [1 + \alpha (1 - \cos \theta)],$$

где $\alpha = h\nu/m_e c^2$, или

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \alpha (1 - \cos \theta)}. \quad (7)$$

Из (3) и (7) получаем выражение кинетической энергии электрона

$$W_k = h(\nu - \nu') = h\nu \frac{\alpha (1 - \cos \theta)}{1 + \alpha (1 - \cos \theta)}. \quad (8)$$

Исключением β из (3) — (5) и (7) получаем соотношение между θ и φ :

$$1 - \cos \theta = \frac{2}{1 + (1 + \alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad (9)$$

что при подстановке в (7) дает

$$W_k = h\nu \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha + (1 + \alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (10)$$

Это и есть искомое выражение. Уравнение (9) также можно записать в виде

$$(1 + \alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta/2};$$

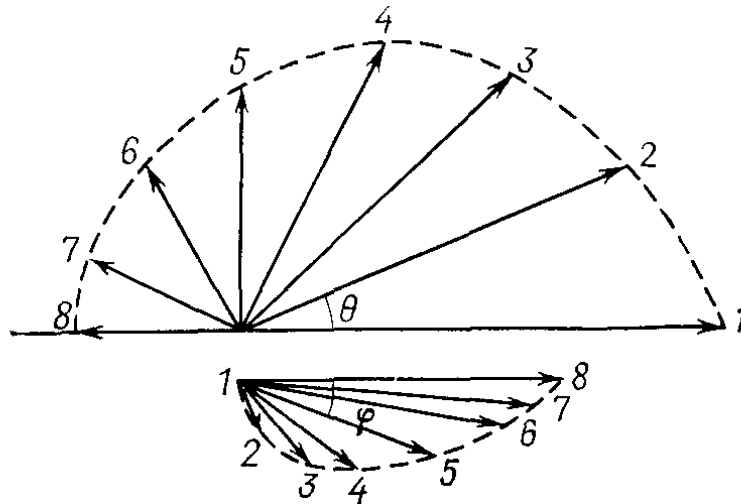
отметим, что θ и φ всегда противоположны по знаку:

$$\operatorname{ctg} \varphi = -(1 + \alpha) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (11)$$

В табл. 62.1 приведены значения φ , $h\nu'/h\nu$ и $W_k/h\nu$ в зависимости от θ .

Таблица 62.1

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π
$\cos \theta$	1	0,866	0,707	0,500	0	-0,500	-0,707	-1
$\operatorname{tg} \theta/2$	0	0,268	0,414	0,577	1,00	1,732	2,414	∞
$\operatorname{ctg} \varphi$	0	0,282	0,435	0,605	1,05	1,82	2,53	∞
φ°	90	74,25	66,5	58,8	43,6	28,8	21,55	0
$h\nu'/h\nu$	1	0,875	0,764	0,656	0,488	0,388	0,358	0,322
$W_k/h\nu$	0	0,125	0,236	0,344	0,512	0,612	0,642	0,678



Фиг. 62.2

На фиг. 62.2 графически представлены различные случаи из этой таблицы.

ЗАДАЧА 63

Формула излучения Планка

1. Рассмотрим изотермическую полость, содержащую линейные гармонические осцилляторы, обладающие собственной частотой ν_0 и дипольным моментом d , число которых в единице объема равно N . При тепловом равновесии энергия, излучаемая осциллятором в виде электромагнитных волн, равна поглощаемой энергии изотермического излучения, которая характеризуется плотностью $\omega(\nu)$ в спектральном интервале $d\nu$. Энергия

излучается так же, как в случае диполя Герца. Чтобы оценить поглощаемую энергию, рассмотрим результаты задачи 51. Принимая первоначально, что полная средняя энергия осциллятора подчиняется принципу равномерного распределения энергии по степеням свободы, покажите, что выражение, полученное для $\omega(\nu)$, — то есть формула Рэлея — Джинса — не выполняется, так как оно не удовлетворяет закону Стефана¹⁾. Затем, принимая предположение Планка, что осциллятор может обладать только такими значениями полной энергии, которые являются кратными энергии W , вычислите среднее значение энергии осциллятора и плотность энергии излучения $\omega(\nu)$, полагая что $W = h\nu$, где h — постоянная Планка.

2. Покажите, что при низких частотах формула Планка приводится к выражению Рэлея — Джинса. Какой вид она принимает при высоких частотах?

3. Учитывая, что $\omega(\nu) d\nu = -\omega(\lambda) d\lambda$, представьте формулу Планка в функции длины волны λ . Покажите, что она принимает вид $\omega(\lambda) = \lambda^{-5} f(1/\lambda T)$ и удовлетворяет закону Стефана

$$\omega = \int \omega(\lambda) d\lambda = C_1 T^4$$

и закону Вина $\lambda_m T = C_2$.

4. Эксперимент дает для постоянной Вина $C_2 = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ м} \times \times \text{град}$, а для постоянной Стефана $C_1 = 7,562 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{град}^{-4}$.

При условии

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

и считая, что решением уравнения $5(e^x - 1) = xe^x$ является $x = 4,965$, определите постоянную Планка h и постоянную Больцмана k через скорость света в вакууме.

РЕШЕНИЕ

1. Средний поток, излучаемый линейным осциллятором Герца, определяется формулой (см. задачу 51)

$$\langle \Phi \rangle = \frac{\omega_0^4 d_m^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Вводя энергию осциллятора

$$W = \frac{1}{2} m \omega_0^2 s_m^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \frac{d_m^2}{q^2}$$

¹⁾ В отечественной литературе этот закон называется «законом Стефана — Больцмана». Закон Стефана — Больцмана в этой задаче записан для спектральной плотности излучения. — *Прим. перев.*

и частоту $\nu = \omega/2\pi$, находим

$$\langle \Phi \rangle = \frac{2\pi\nu_0^2 q^2}{3\epsilon_0 c^3 m} W. \quad (1)$$

С другой стороны, выражение для поглощаемой мощности выводится, как в случае светового потока, поглощаемого средой, состоящей из классических осцилляторов (задача 49). Поток Φ_0 , переносимый плоской волной с единицы площади на расстояние dx , встречает на своем пути Ndx осцилляторов. Поглощаемая мощность потока $d\Phi_0$ определяется уравнением (9) из задачи 49. Каждый осциллятор поглощает мощность в соответствии с формулой

$$\frac{d\Phi_0}{N dx} = \frac{q^2}{4\epsilon_0 m} \omega(\nu). \quad (2)$$

При тепловом равновесии левые части уравнений (1) и (2) равны, поэтому

$$\omega(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{3c^3} W.$$

Но поскольку тепловое излучение в изотермическом объеме изотропно, его плотность в 3 раза больше плотности потока, распространяющегося в одном направлении. Таким образом,

$$\omega(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} W. \quad (3)$$

Если имеет место равномерное распределение энергии по степеням свободы (см. задачу 79), то можно считать, что энергия линейного гармонического осциллятора равна kT . В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\omega(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT. \quad (4)$$

Интеграл $\int_0^\infty \omega(\nu) d\nu$ имеет бесконечную величину, если значение $\omega(\nu)$ определяется формулой (4), вместо того чтобы быть пропорциональным T^4 , согласно закону Стефана. Таким образом, закон Рэлея — Джинса (4) не отражает спектрального распределения для излучения черного тела. Это выражение следует из условия равномерного распределения энергии, полученного в свою очередь в предположении, что энергия может изменяться непрерывно (см. задачу 79). Допустим теперь обратное, что энергия осциллятора с частотой ν может принимать только значения $0, h\nu, 2h\nu, \dots, \nu h\nu$ (где ν — положительное целое число)

и что N_0 — число невозбужденных осцилляторов. Число осцилляторов с энергией $nh\nu$ в объеме при температуре T , при использовании коэффициента Больцмана, равно

$$N_\nu = N_0 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right).$$

Полное число осцилляторов

$$N = N_0 \left[1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{2h\nu}{kT}\right) + \dots \right] = \\ = \frac{N_0}{1 - \exp(-h\nu/kT)},$$

а энергия всего ансамбля определяется формулой

$$U = h\nu N_0 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) + 2h\nu N_0 \exp\left(-\frac{2h\nu}{kT}\right) + \dots \\ \dots + nh\nu N_0 \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right) + \dots$$

U равно производной N по $1/kT$, следовательно,

$$U = \frac{N_0 h\nu \exp(-h\nu/kT)}{[1 - \exp(-h\nu/kT)]^2} = \frac{N h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Среднее значение энергии осцилляторов $\langle W \rangle$ равно U/N , и уравнение (2) принимает вид

$$\omega(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (5)$$

Это и есть закон излучения Планка, дающий с хорошей точностью распределение энергии, излучаемой абсолютно черным телом.

2. Для низких частот, если $h\nu \ll kT$, можно разложить экспоненту в (5) в ряд и ограничиться первыми двумя членами, что дает

$$\omega(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{kT}{h\nu}.$$

Постоянная h исключается, и мы снова получаем невыполняющееся классическое выражение (4).

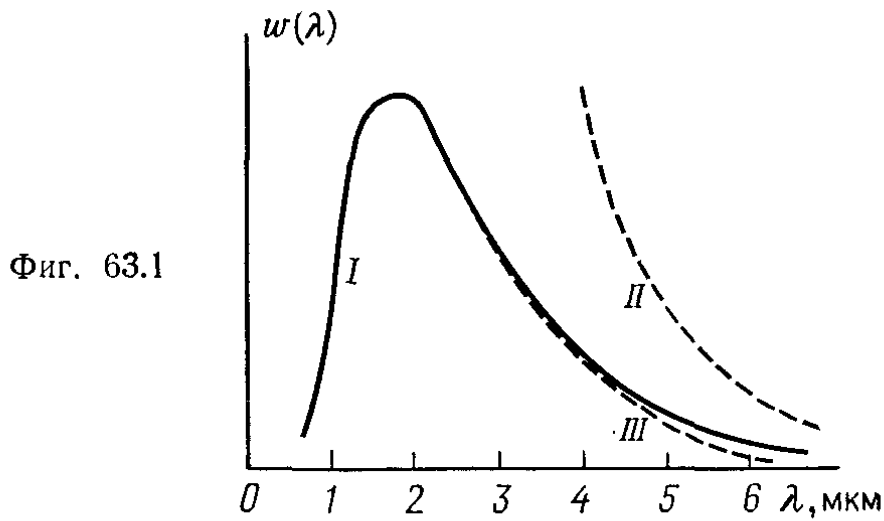
При высоких частотах, если $h\nu \gg kT$, в (5) можно пренебречь единицей по сравнению с экспонентой, что приводит к соотношению

$$\omega(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (6)$$

Это выражение определяет некую функцию от ν и T , аналогичную той, которая предлагалась до Планка Вином для некоторых

случаев излучения и поглощения. Оно хорошо представляет изотермы абсолютно черного тела в области выше $2 \cdot 10^{14}$ Гц (см. фиг. 63.1).

3. Пусть $w(\nu)$ — плотность излучаемой энергии в частотном интервале $d\nu$, а $d\lambda$ — интервал длин волн, соответствующий $d\nu$.



Тогда

$$\lambda\nu = c, \quad \text{откуда} \quad \nu d\lambda + \lambda d\nu = 0,$$

и

$$w(\nu) d\nu = -w(\lambda) d\lambda,$$

откуда

$$w(\lambda, T) = \frac{\nu}{\lambda} w(\nu) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/k\lambda T) - 1}. \quad (7)$$

Это выражение имеет вид $w_\lambda = \lambda^{-5} f(1/\lambda T)$.

На фиг. 63.1 представлены изотермы абсолютно черного тела ($T = 1600$ К). Кривая I описывается формулой (7), кривая II — выражением, полученным из (4), а кривая III соответствует формуле, аналогичной (6).

Принимая $x = hc/kT\lambda$, из (7) получаем

$$w(T) = \int_0^\infty w(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (8)$$

Этот интеграл не зависит от T . Таким образом, полное излучение абсолютно черного тела пропорционально T^4 . Это закон Стефана.

Максимальное значение $w(\lambda, T)$ при данной температуре находится при том значении длины волны λ_m , для которого величина

$$\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1 \right]$$

принимает наименьшее значение, или

$$\frac{A(e^x - 1)}{x^5}, \quad \text{где} \quad A = \left(\frac{hc}{kT}\right)^5.$$

Условие минимума можно записать как

$$5(e^x - 1) = xe^x. \quad (9)$$

Решение этого уравнения для переменной x определяет значение x через константы. Таким образом, $\lambda_m T$ равно некоторой постоянной величине. Это и есть закон Вина.

4. Уравнение (8), при использовании заданного в условии интеграла, дает

$$\frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} = C_1 = 7,562 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}.$$

Решение уравнения (9) : $x = 4,965$, тогда

$$\frac{hc}{4,965k} = \lambda_m T = C_2 = 2897 \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot \text{К}.$$

Находим

$$h = \frac{7,652 \cdot 10^{-16} \cdot (4,965 \cdot 2,897)^4 \cdot 10^{-12} \cdot 15}{8 \cdot (3,14)^5 \cdot 3 \cdot 10^8} = 6,627 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

а также

$$k = \frac{6,627 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,965 \cdot 2897 \cdot 10^{-6}} = 1,382 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

ЗАДАЧА 64

Основное состояние двухэлектронного атома

Нужно оценить энергию основного состояния двухэлектронного атома или иона, пользуясь соотношениями неопределенности. Чтобы использовать эти полуколичественные представления, надо исходить из одномерной системы. Ядро с зарядом Ze будем считать бесконечно тяжелым точечным ядром, помещенным в начале координат.

1. Напишите выражение для механической энергии системы через координаты электрона r_1 и r_2 и его импульсы p_1 и p_2 .

2. R_1 и R_2 являются размерами областей, где вероятности нахождения обоих электронов достаточно велики. Каков порядок величин неопределенностей импульсов Δp_1 и Δp_2 ?

3. Оцените порядок величины энергии основного состояния, найдя W как функцию R_1 и R_2 , а затем определите минимум этого выражения, которое симметрично относительно двух переменных.

4. Сравните полученные таким образом значения для H^- , He и Li^+ с соответствующими экспериментальными значениями $-14,2$, $-78,4$ и $-196,6$ эВ.

РЕШЕНИЕ

1.

$$W = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Ze^2}{r_1} + \frac{Ze^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}} \right), \quad (1)$$

где $r_{12} = |r_1 - r_2|$.2. $\Delta r_1 = R_1$, $\Delta r_2 = R_2$, откуда

$$\Delta p_1 \approx \frac{h}{R_1} \quad \text{и} \quad \Delta p_2 = \frac{h}{R_2}.$$

3. По классической теории энергия минимальна, когда оба электрона находятся в состоянии покоя ($W_k = 0$) в начале координат (W_p имеет наибольшее отрицательное значение). Эта конфигурация несовместима с соотношением неопределенности. Состояния электронов описываются волновыми функциями, зависящими от расстояний R_1 и R_2 до начала координат:

$$W \approx \frac{h^2}{2m} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ Ze^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{e^2}{R_1 + R_2} \right\}. \quad (2)$$

Минимальное значение соответствует $\partial W / \partial R_1 = \partial W / \partial R_2 = 0$, и поскольку W симметрично относительно R_1 и R_2 и $R_1 = R_2 = R$,

$$W \approx \frac{h^2}{mR^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2Ze^2}{R} + \frac{e^2}{2R} \right). \quad (3)$$

Из условия $\partial W / \partial R = 0$ получаем

$$R = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{m^2} \frac{1}{Z - 1/4}. \quad (4)$$

Подставляя это значение в (3), получаем

$$W_{\min} = - \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 \frac{me^4}{16\pi^2\epsilon_0 h^2}. \quad (5)$$

4. Заметим, что если написать соотношение неопределенности в виде $\Delta p \Delta r \approx \hbar$, то в уравнении (4) будет содержаться множитель $\epsilon_0 h^2 / \pi m e^2$, представляющий радиус Бора, и (5) можно записать в виде

$$W_{\min} = \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 2W_0,$$

где W_0 — энергия основного состояния атома H, равная 13,6 эВ. Тогда находим в эВ:

	H ⁻	He	Li ⁺
Z	1	2	3
$W_{\min}$	-15,3	-83	-205

в полном согласии с измеренными значениями.

ЗАДАЧА 65

Возмущение первого порядка. Основное состояние атома гелия

Атом гелия состоит из ядра с $Z = 2$ и двух электронов.

1. Напишите уравнение Шредингера для стационарных состояний, считая потенциал кулоновским.

Чтобы решить это уравнение, сначала пренебрегают взаимодействием электронов (приближение атома водорода). Уравнение в этом случае имеет вид

$$H_0\psi_0 = W_0\psi_0, \quad (1)$$

где H_0 — оператор Гамильтона. Чему равны собственные значения энергии W_{0n} и собственные функции ψ_{0n} ? Покажите, что для состояния с минимальной энергией, одноэлектронной волновой функцией, допускаемой принципом Паули, является функция

$$\psi_{100} = A \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right), \quad (2)$$

где $\rho = 4r/r_0$, r — расстояние от ядра до электрона, r_0 — среднее значение радиуса H , а A — нормирующая постоянная, величину которой надо рассчитать.

2. Рассмотрите кулоновское отталкивание между электронами как возмущение, иными словами, замените уравнение (1) на

$$(H_0 + \varepsilon H')\psi = W\psi, \quad (3)$$

где $\varepsilon H'$ — оператор, соответствующий возмущению гамильтониана, записываемый таким образом (ε — малое действительное число), чтобы показать, что этот член мал по сравнению с H_0 . Напишите выражение для H' . Чтобы найти собственные значения W_n и собственные функции ψ_n , разложите W_{0n} и ψ_{0n} в степенной ряд по ε :

$$W_n = W_{0n} + \varepsilon W'_n + \varepsilon^2 W''_n + \dots, \quad (4)$$

$$\psi_n = \psi_{0n} + \varepsilon \psi'_n + \varepsilon^2 \psi''_n + \dots \quad (5)$$

Подставив эти разложения в уравнение (3), напишите уравнение для первого порядка возмущения. Замените ψ'_n разложением по собственным функциям невозмущенной атомной системы и покажите, что изменение W'_n , которому подвергается уровень энергии n в результате возмущения первого порядка, определяется формулой

$$W'_n = \int \psi_{0n}^* H' \psi_{0n} d\tau. \quad (6)$$

3. Покажите, что расчет W'_1 основного состояния подобен расчету энергии для сферически-симметричного распределения электрического заряда при аналогичном распределении потенциала. Вычислите W'_1 , принимая энергию основного состояния для водорода равной 13,56 эВ, и тем самым найдите энергию основного состояния атома гелия. Сравните ее с экспериментально полученным значением $-78,4$ эВ.

РЕШЕНИЕ

1. Масса электрона намного меньше массы ядра, так что ядро можно рассматривать как неподвижное. Тогда гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к каждому из электронов, r_1 и r_2 — расстояния электронов от ядра, а r_{12} — расстояние между ними. Если рассматривать взаимное кулоновское отталкивание как возмущение, описываемое членом

$$H = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \quad (7)$$

то гамильтониан для невозмущенной системы будет иметь вид

$$H_0 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_1 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \right).$$

С помощью разделения переменных уравнение Шредингера можно разбить на две части, каждая из которых соответствует водородной задаче для ядра с зарядом Ze . Нетрудно показать, что, если в решении задачи о водороде умножить значение потенциальной энергии на Z , энергия W умножается на Z^2 и собственная функция ψ_{100} принимает вид

$$\psi_{100} = A \exp\left(-\frac{Zr}{r^0}\right),$$

так что при $Z = 2$ она удовлетворяет уравнению (2). Постоянную A можно вычислить с помощью условия нормировки

$$\int_0^\infty \psi_{100}^2 d\tau = 1 = 4\pi A^2 \int_0^\infty \exp(-\rho) \rho^2 d\rho.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int \exp(-\rho) \rho^2 d\rho = -\rho^2 \exp(-\rho) - 2\rho \exp(-\rho) - 2 \exp(-\rho). \quad (8)$$

Величина интеграла равна 2 и

$$A = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}. \quad (9)$$

Принцип Паули позволяет двум электронам иметь одну и ту же собственную функцию ψ_{100} в основном состоянии, если их спины противоположны. Собственная функция основного состояния невозмущенной системы представляет собой произведение собственных функций двух электронов:

$$\psi_{100}(r_1, r_2) = \psi_{100}(r_1) \cdot \psi_{100}(r_2).$$

Энергия этого состояния равна сумме энергий каждого из электронов и в $Z^2 = 4$ раза больше энергии основного состояния атома водорода.

2. Если подставить разложения (4) и (5) в уравнение (3) и приравнять соответственно члены с нулевыми и первыми степенями ε , то полученные тождества для ε приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} H_0 \psi_{0n} &= W_{0n} \psi_{0n}, \\ H_0 \psi'_n + H' \psi_{0n} &= W_{0n} \psi'_n + W'_n \psi_{0n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Первое из этих уравнений — невозмущенное уравнение для системы (1). Если во втором уравнении заменить ψ'_n разложением

$$\psi'_n = \sum_{n'} c_{nn'} \psi_{0n'},$$

то с учетом (1) получим

$$\sum_{n'} c_{nn'} (W_{0n'} - W_{0n}) \psi_{0n'} = (W'_n - H') \psi_{0n}. \quad (11)$$

Умножая обе части этого уравнения на ψ_{0n}^* и интегрируя по всему объему, находим

$$\sum_{n'} c_{nn'} (W_{0n'} - W_{0n}) \int \psi_{0n}^* \psi_{0n'} d\tau = W'_n \int \psi_{0n}^* \psi_{0n} d\tau - \int \psi_{0n}^* H' \psi_{0n} d\tau$$

или, принимая во внимание условия ортогональности и нормировки,

$$W'_n = \int \psi_{0n}^* H' \psi_{0n} d\tau. \quad (12)$$

Это и есть искомое выражение. Видно, что сдвиг энергетического уровня n равен среднему значению возмущения для невозмущенной системы в состоянии n .

3. Если применить выражение (12) к задаче об основном состоянии гелия, где (7) определяет возмущающий член, то находим

$$W'_1 = \iint \psi_{100}^*(r_1) \psi_{100}^*(r_2) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \psi_{100}(r_1) \psi_{100}(r_2) dr_1 dr_2. \quad (13)$$

Произведение $e\psi_{100}^*$ представляет собой плотность электрического заряда в некоторой точке, обусловленную присутствием электрона. Следовательно, уравнение (13) представляет электростатическую энергию двух сферически симметричных распределений, каждое из которых относится к одному электрону. Тогда с учетом (2) и (9) выражение для энергии запишется в виде

$$W'_1 = \frac{4e^2}{r_0 (8\pi)^2 4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\exp(-\rho_1) \exp(-\rho_2)}{\rho_{12}} d\tau_1 d\tau_2, \quad (14)$$

где $\rho_{12} = (4/r_0)r_{12}$, причем элементы объема $d\tau_1$ и $d\tau_2$ выражаются как функции ρ_1 и ρ_2 соответственно. Чтобы оценить этот интеграл, напомним для каждой точки выражение для кулоновского потенциала, обусловленного объемной плотностью $\exp(-\rho_1)$, а затем для энергии в этой точке другого заряда с объемной плотностью $\exp(-\rho_2)$. Заряд

$$dQ_1 = \exp(-\rho_1) 4\pi\rho_1^2 d\rho_1$$

находится в сферической оболочке толщиной $d\rho_1$. Во внутренней точке он создает потенциал, равный по величине $dV = dQ_1/\rho_1$. Во внешней точке, расположенной на расстоянии ρ_2 от центра заряда, последний создает такой же потенциал, как если бы заряд, распределенный в оболочке, был сосредоточен в центре, а именно $dV' = dQ_1/\rho_2$. Тогда потенциал, обусловленный распределением плотности $e\psi(\rho_1)$, равен

$$V(\rho_2) = 4\pi \int_0^{\rho_2} \exp(-\rho_1) \frac{\rho_1^2}{\rho_2} d\rho_1 + 4\pi \int_{\rho_2}^{\infty} \exp(-\rho_1) \rho_1 d\rho_1.$$

Используя (8) и интеграл

$$\int \exp(-\rho) \rho d\rho = -\rho \exp(-\rho) - \exp(-\rho), \quad (15)$$

находим

$$V(\rho_2) = \frac{4\pi}{\rho_2} [2 - 2\exp(-\rho_2) - \rho_2 \exp(-\rho_2)].$$

В этом случае интеграл (14) принимает вид

$$\mathfrak{Z} = \int V(\rho_2) dQ_2,$$

и, считая dQ_2 зарядом сферической оболочки, получаем

$$dQ_2 = 4\pi\rho_2^2 \exp(-\rho_2) d\rho_2,$$

$$\mathfrak{Z} = (4\pi)^2 \int_0^{\infty} [2\rho_2 \exp(-\rho_2) - 2\rho_2 \exp(-2\rho_2) - \rho_2^2 \exp(-2\rho_2)] d\rho_2$$

или, используя (8) и (15),

$$\mathfrak{Z} = (4\pi)^2 \frac{5}{4}.$$

Тогда для энергии (14) имеем значение

$$W'_1 = \frac{5}{4} \frac{4e^2 (4\pi)^2}{(8\pi)^2 (4\pi\epsilon_0) r_0} = \frac{10}{4} \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0) 2r_0}.$$

Теперь энергия основного состояния атома водорода выражается в виде

$$W_1 = - \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0) 2r_0},$$

откуда

$$W'_1 = - \frac{10}{4} W_1 = + \frac{10}{4} 13,56 = + 33,9 \text{ эВ.}$$

Энергия основного состояния атома гелия в пренебрежении электронным взаимодействием, согласно п. 1, равна

$$W_0 = 2 \cdot 4W_1 = - 108,5 \text{ эВ.}$$

Следовательно, исправленное значение энергии основного состояния равно

$$W = W_0 + W'_1 = - 108,5 + 33,9 = - 74,6 \text{ эВ.}$$

Видно, что значение W'_1 , которое должно получаться при применении этого метода, не так уж мало по сравнению с W_0 . Тем не менее полученный результат имеет точность порядка 5%.

ЗАДАЧА 66

Возмущение второго порядка. Эффект Штарка для ротатора

1. Пользуясь общим методом возмущения, описанным во второй части задачи 65, напишите уравнение для возмущения второго порядка. Для этого замените член второго порядка ψ''_n собственной функции состояния n разложением в ряд по собственным функциям невозмущенной системы. Покажите, что поправка второго порядка для энергетического уровня n определяется формулой

$$W''_n = \sum_{n' \neq n} \frac{\left(\int \psi_{0n'}^* H' \psi_{0n} d\tau \right)^2}{W_{0n} - W_{0n'}}. \quad (1)$$

2. Двухатомная молекула, имеющая момент инерции I относительно оси, проходящей перпендикулярно линии, соединяющей ядра, через центр масс молекулы и обладающая дипольным

моментом d , может быть рассмотрена как плоский ротатор. Она помещена в постоянное однородное электрическое поле E , перпендикулярное оси вращения. Рассматривая действие этого поля как возмущение, получите первый ненулевой поправочный член к энергетическим уровням такого ротатора.

РЕШЕНИЕ

1. Вводя разложения в ряд (4) и (5) из задачи 65 в уравнение (3) из той же задачи, находим для членов с ε^2

$$H_0 \psi_n'' + H' \psi_n' = W_{0n} \psi_n'' + W_n \psi_n' + W_n'' \psi_{0n}$$

или

$$(H_0 - W_{0n}) \psi_n'' = (W_n' - H') \psi_n' + W_n'' \psi_{0n}. \quad (2)$$

Считая, в соответствии с указаниями в условии задачи,

$$\psi_n'' = \sum_{n'} \gamma_{nn'} \psi_{0n'},$$

и вводя это разложение в (2), а затем умножая каждый член на ψ_{0n}^* и интегрируя по всему пространству, находим, пользуясь уравнением (10) (задача 65) и разложением ψ_n' ,

$$\begin{aligned} \sum_{n'} \gamma_{nn'} (W_{0n'} - W_{0n}) \int \psi_{0n}^* \psi_{0n'} d\tau = \\ = \sum_{n' \neq n} c_{nn'} W_n' \int \psi_{0n}^* \psi_{0n'} d\tau - \sum_{n' \neq n} c_{nn'} \int \psi_{0n}^* H' \psi_{0n'} d\tau + W_n'' \int \psi_{0n}^* \psi_{0n} d\tau. \end{aligned}$$

Вследствие ортогональности невозмущенных собственных функций интеграл слева и первый интеграл справа равны нулю, а последний интеграл справа равен единице. Таким образом,

$$W_n'' = \sum_{n' \neq n} c_{nn'} \int \psi_{0n}^* H' \psi_{0n'} d\tau.$$

Для вычисления $c_{nn'}$ вновь обратимся к уравнению (11) (задача 65) (изменяя индексы n' и n'') и умножим обе стороны уравнения на $\psi_{0n'}^*$. Получим

$$\sum_{n''} c_{nn'} (W_{0n'} - W_{0n}) \int \psi_{0n'}^* \psi_{0n''} d\tau = \int \psi_{0n'}^* (W_n' - H') \psi_{0n} d\tau,$$

откуда при $n' \neq n$ и с учетом уравнения (12) (задача 65) имеем

$$c_{nn'} = \frac{\int \psi_{0n'}^* H' \psi_{0n} d\tau}{W_{0n} - W_{0n'}}$$

и

$$W''_n = \sum_{n' \neq n} \frac{\left(\int \psi_{0n'}^* H' \psi_{0n} d\tau \right)^2}{W_{0n} - W_{0n'}},$$

что совпадает с уравнением (1).

2. Невозмущенный ротатор обладает только кинетической энергией. Гамильтониан имеет вид

$$H_0 = \frac{G_z^2}{2I},$$

где G_z — угловой момент. При подстановке вместо оператора G_z его значения

$$G_z = -\frac{\hbar}{j} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

где $j = \sqrt{-1}$, а φ — переменный угол, уравнение Шредингера

$$H_0 \psi_0 = W_0 \psi_0$$

принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \varphi^2} = W_0 \psi_0. \quad (3)$$

Это уравнение имеет собственные значения

$$W_{0J} = \frac{\hbar^2 J^2}{2I} \quad (4)$$

и собственные функции

$$\psi_{0J} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\pm jJ\varphi), \quad (5)$$

где J равно нулю или целому числу.

В однородном электрическом поле $\mathbf{E}$ потенциальная энергия ротатора с дипольным моментом $\mathbf{d}$ равна

$$W_p = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = -Ed \cos \varphi.$$

Так как поле $\mathbf{E}$, перпендикулярное оси вращения, составляет с $\mathbf{d}$ угол φ , то его удобно выбрать в качестве координаты.

Возмущение гамильтониана равно $H' = W_p$, и уравнение (3) заменяется на

$$\frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} - \frac{2I}{\hbar^2} (W_0 + Ed \cos \varphi) \psi = 0. \quad (6)$$

Вычисляя поправку первого порядка с помощью уравнения (12) (задача 65), находим

$$W'_J = \int_0^{2\pi} \psi_{0J}^* H' \psi_{0J} d\varphi = -\frac{Ed}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[j(J' - J)\varphi] \cos \varphi d\varphi. \quad (7)$$

Интеграл равен нулю, и в результате в первом приближении энергетический сдвиг всех уровней также равен нулю.

Поправка второго порядка определяется уравнением (1), которое записывается здесь в виде

$$W_J'' = \sum_{J' \neq J} \frac{\left(\int_0^{2\pi} \psi_{0J'}^* H' \psi_{0J} d\varphi \right)^2}{W_{0J} - W_{0J'}}. \quad (8)$$

Значение W_{0J} определяется уравнением (4), ψ_{0J} — уравнением (5). Тогда имеем

$$\int_0^{2\pi} \psi_{0J'}^* H' \psi_{0J} d\varphi = -\frac{Ed}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[j(J' - J)\varphi] \cos \varphi d\varphi.$$

Известно, что этот интеграл равен нулю для всех значений $J' - J$, за исключением значения ± 1 , при котором он равен π . Сумма (8) сводится тогда к двум членам в соответствии с правилом отбора для ротатора $\Delta J = \pm 1$:

$$W_J'' = \frac{E^2 d^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{W_{0J} - W_{0, J-1}} + \frac{\pi^2}{W_{0J} - W_{0, J+1}} \right\},$$

$$W_J'' = \frac{E^2 d^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{2I\pi^2}{\hbar^2 [J^2 - (J-1)^2]} + \frac{2I\pi^2}{\hbar^2 [J^2 - (J+1)^2]} \right\} = \frac{E^2 d^2 I}{\hbar^2 (4J^2 - 1)}.$$

Таким образом, энергетические уровни возмущенного ротатора определяются формулой

$$W_J = W_{0J} + W_J'' = \frac{\hbar^2 J^2}{2I} + \frac{E^2 d^2 I}{\hbar^2 (4J^2 - 1)}.$$

ЗАДАЧА 67

Внутримолекулярный потенциал этана

Допустим, что функция $W_p = -W_0 \cos 3\theta$ представляет собой изменение потенциальной энергии молекулы этана при вращении двух метильных групп друг относительно друга вокруг связи углерод—углерод. Угол θ это угол между $C'CH_1$ и $CC'H'_1$ (фиг. 67.1), а W_0 — постоянная, характеризующая молекулу.

Считайте, что длины связей $CH_1=CH_2=CH_3=a$, и вспомните, что направления связей от C к H_1, H_2, H_3 и C' имеют симметрию правильного тетраэдра.

В этой задаче будут рассмотрены два отдельных случая.

Случай 1: молекула этана H_3C-CH_3 ; случай 2: молекула гексахлорэтана Cl_3C-CCl_3 .

Численные значения: масса атома Cl в 35,5 раз больше массы атома H; $a = 1,08 \text{ \AA}$ (случай 1) и $1,8 \text{ \AA}$ (случай 2); $W_0 = 0,06 \text{ эВ}$ (оба случая). Заданы также значения N , e и h .

1. Покажите, что уравнение Шредингера можно записать в виде

$$\frac{h^2}{8\pi I} \frac{d^2\psi}{d\theta^2} + W_0 \cos 3\theta \psi = -W\psi, \quad (1)$$

где I — приведенный момент инерции относительно оси CC' . Найдите I для случаев 1 и 2.

2. Допустите вначале, что W_0 пренебрежимо мало по сравнению с W .

а) Решив уравнение Шредингера для этого случая, получите выражения для собственных значений и собственных функций системы, принимая во внимание условия периодичности, накладываемые на функцию ψ .

б) Какова зависимость от угла θ вероятности нахождения системы в различных состояниях?

в) Сравните найденные выше энергетические уровни с уровнями энергии ротатора, имеющего такой же момент инерции относительно фиксированной оси.

г) Справедливо ли допущение, что величиной W_0 можно пренебречь по сравнению с W ? Вычислите величину W в электрон-вольтах для случаев 1 и 2.

3. Допустите теперь, что W_0 имеет существенную величину.

а) Путем чисто физического рассмотрения покажите, что ψ имеет существенное значение при $3\theta = 2k\pi$ (k — целое число). Поэтому при рассмотрении уравнения Шредингера учитываются только два первых члена в разложении $\cos 3\theta$.

б) Знаком ли Вам вид преобразованного уравнения? С какой задачей он ассоциируется?

4. Найдите энергетические уровни системы, определенные предыдущим уравнением. Рассмотрите решения в виде

$$\psi(\theta) = \exp\left(-\frac{b\theta^2}{2}\right) P(\theta),$$

где b — константа, которую нужно определить, а $P(\theta)$ — полином. Записав $P(\theta)$ с конечным числом членов, укажите условия, которые определяют возможные значения энергии системы W .

а) Примените эти условия и напишите общее выражение для W .

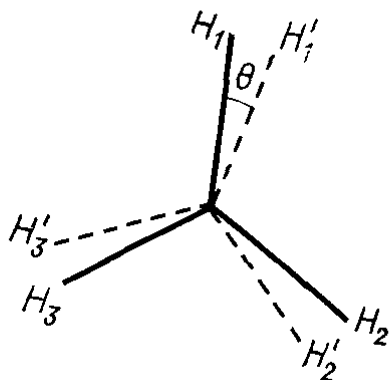
б) Сравните W с W_0 . Рассчитайте первые три уровня для W в электрон-вольтах для случаев 1 и 2. Обсудите результаты.

РЕШЕНИЕ

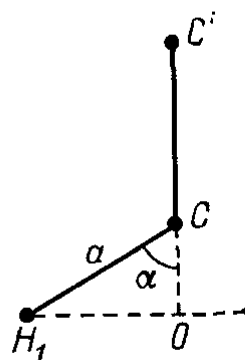
1. Вращение CH_3 -групп друг относительно друга происходит в молекуле вокруг фиксированной оси $\text{C}-\text{C}'$. Эта ось перпенди-

кулярна плоскости чертежа (фиг. 67.1), причем группа $\text{CH}_1\text{H}_2\text{H}_3$ расположена перед группой $\text{C}'\text{H}'_1\text{H}'_2\text{H}'_3$. Относительное положение этих групп зависит только от угла θ . Задача действительно аналогична задаче о ротаторе с фиксированной осью, но отличается от нее по двум пунктам.

Во-первых, поскольку обе метильные группы подвижны, то момент инерции, используемый в этой задаче, является приведен-



Фиг. 67.1



Фиг. 67.2

ным моментом инерции, аналогичным приведенной массе линейного осциллятора; величина его в общем случае равна

$$I = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}.$$

Здесь $I_1 = I_2 = I_0$ и $I = I_0/2$, причем I_0 — момент инерции метильной группы относительно оси CC' . Имеем (фиг. 67.2)

$$I_0 = \sum mr^2 = 3m(a \sin \alpha)^2,$$

где m — масса атома водорода (или хлора), а α — угол, дополнительный к углу

$$\widehat{\text{H}_1\text{CC}'} = 109^\circ 28'.$$

Для C_2H_6 :

$$I = \frac{3 \cdot 10^{-26}}{2 \cdot 6,025} (1,08 \cdot 0,9428)^2 = 2,66 \cdot 10^{-47} \text{ кг/м}^2.$$

Для C_2Cl_6 :

$$I = \frac{3 \cdot 10^{-26} \cdot 35,5}{2 \cdot 6,025} (1,8 \cdot 0,9428)^2 = 254 \cdot 10^{-47} \text{ кг/м}^2.$$

Во-вторых, здесь имеется потенциальная энергия W_p , которая отсутствует в случае ротатора. Рассмотрение уравнения Шредингера для стационарных состояний частицы с массой m

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + (W - W_p) \psi = 0$$

и обсуждение, аналогичное тому, которое проводилось для ротатора, показывает, что первый член может быть представлен в виде

$$\frac{\hbar^2}{2I} \frac{d^2\psi}{d\theta^2}.$$

Принимая во внимание заданное в задаче выражение $W_p = -W_0 \cos 3\theta$, находим, что уравнение Шредингера совпадает с уравнением (1), что и требовалось показать.

2. Если потенциальной энергией можно пренебречь по сравнению с энергией молекулы, уравнение (1) принимает форму уравнения для ротатора с фиксированной осью. Это отвечает свободному вращению двух половин молекулы относительно друг друга. Волновые функции имеют форму функций для ротатора:

$$\psi = C \exp\left(\pm j \sqrt{\frac{2IW}{\hbar^2}} \varphi + \alpha\right). \quad (2)$$

Однако рассмотрение фиг. 67.1 показывает, что эта функция периодична с периодом $2\pi/3$:

$$\psi(0) = \psi\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Это условие, примененное к (2), дает

$$\exp\left(\pm j \sqrt{\frac{2IW}{\hbar^2}} \frac{2\pi}{3}\right) = 1,$$

откуда определяются собственные значения энергии:

$$W_J = J^2 \frac{9\hbar^2}{2I} \quad (J - \text{целое число}). \quad (3)$$

Один из трех энергетических уровней ротатора со свободной осью является разрешенным.

Для C_2H_6 :

$$W_J = J^2 \frac{9 \cdot (1,054 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 2,66 \cdot 10^{-47}} = J^2 \frac{9,999 \cdot 10^{-68}}{5,32 \cdot 10^{-47}} = 1,90 \cdot 10^{-21} J^2 \text{ Дж},$$

$$W_J = \frac{1,90 \cdot 10^{-21}}{1,60 \cdot 10^{-19}} J^2 = 1,19 \cdot 10^{-2} J^2 \text{ эВ}.$$

Энергия W_J для второго возбужденного уровня ($J = 2$) превышает значение W_0 .

Для C_2Cl_6 :

$$W_J = J^2 \frac{9 \cdot (1,054 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 254 \cdot 10^{-47} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}} = 1,2 \cdot 10^{-4} J^2 \text{ эВ}.$$

В этом случае J должно быть равным 23, чтобы величина W_J достигала величины W_0 . Таким образом, легко вызвать внутрен-

нее вращение при возбуждении молекулы C_2H_6 . Напротив, это трудно сделать в случае молекулы C_2Cl_6 .

3. Молекула находится в равновесном состоянии тогда, когда ее потенциальная энергия имеет минимальное значение, то есть при $\theta = 2K\pi/3$. Вероятность осуществления такой конфигурации максимальна. Вследствие вероятностной интерпретации ψ эта функция имеет значительную величину при указанных выше значениях θ . При малых значениях θ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\hbar^2}{2I} \frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \left[W + W_0 \left(1 - \frac{9}{2} \theta^2 \right) \right] \psi = 0. \quad (4)$$

В этой форме, где потенциальная энергия квадратично зависит от переменной ψ , оно оказывается подобным уравнению для гармонического осциллятора. Здесь имеют место вращательные осцилляции, вызывающие кручение в молекуле относительно оси CC' .

4. Чтобы решить уравнение (4), поступим так же, как и в случае гармонического осциллятора. При подстановке

$$a = \frac{2I}{\hbar^2} (W + W_0), \quad b^2 = \frac{9IW}{\hbar^2}, \quad q = \theta \sqrt{b}$$

уравнение (4) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + \left(\frac{a}{b} - q^2 \right) \psi = 0. \quad (5)$$

При значениях q , много больших чем a/b , это уравнение имеет асимптотическое решение

$$\psi = \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{b\theta^2}{2}\right).$$

Тогда общее решение ищем в виде

$$\psi = \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) P(q),$$

при этом

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} = \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) \left[\frac{d^2P}{dq^2} - 2q \frac{dP}{dq} + (q^2 - 1) P \right].$$

При подстановке в уравнение (5) получаем

$$\exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) \left[\frac{d^2P}{dq^2} - 2q \frac{dP}{dq} + \left(\frac{a}{b} - 1\right) qP \right] = 0. \quad (6)$$

При $q = \infty$ экспоненциальный член равен нулю, поэтому выражение в скобках должно быть равно нулю. Принимая

$$P(q) = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \dots, \quad (7)$$

подставляя его в (6) и считая, что коэффициенты при последовательных степенях q равны нулю, найдем

$$2a_2 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)a_0 = 0, \quad 6a_3 - 2a_1 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)a_1 = 0 \dots$$

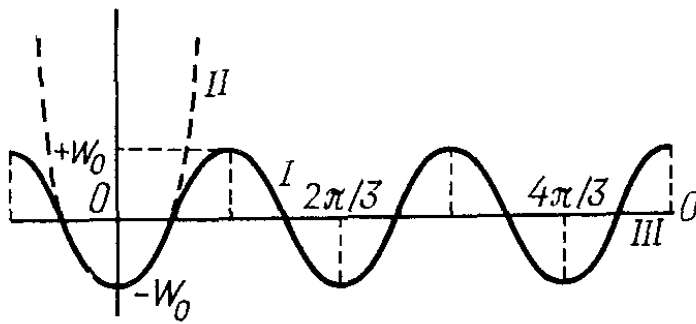
а в общем виде

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n + \left(\frac{a}{b} - 1\right)a_n = 0.$$

Отсюда получается рекуррентное соотношение

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a/b - 1 - 2n}{(n+1)(n+2)} \quad (n - \text{целое число или ноль}). \quad (8)$$

Если $a/b = 2n+1$, ряд (7) заканчивается членом q'' , так как коэффициент при q^{n+2} и все члены более высокого порядка стре-



Фиг. 67.3

мятся к нулю. То же верно для a_{n+1} . Тогда имеем

$$2n+1 = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{I}}{3\hbar} \frac{W+W_0}{\sqrt{W_0}},$$

откуда

$$W = 3\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{W_0}{I}} - W_0. \quad (9)$$

Для C_2H_6 значения первых трех энергетических уровней равны

$$n=0, \quad W = \frac{3}{2} \cdot 1,054 \cdot 10^{-34} \sqrt{\frac{0,06 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}{2,66 \cdot 10^{-47}}} - 0,06 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19},$$

$$W + W_0 = 0,30 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 1,87 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

Величина $W + W_0$ соответствует минимуму на кривой потенциальной энергии

$$n=1, \quad W + W_0 = 0,90 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 5,61 \cdot 10^{-2} \text{ эВ},$$

$$n=2, \quad W + W_0 = 1,50 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 9,35 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

Для C_2Cl_6 :

$$n=0, \quad W + W_0 = 0,308 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 0,19 \cdot 10^{-2} \text{ эВ},$$

$$n=1, \quad W + W_0 = 0,57 \cdot 10^{-21} \text{ эВ},$$

$$n=2, \quad W + W_0 = 0,95 \cdot 10^{-21} \text{ эВ}.$$

На фиг. 67.3 представлены предполагаемое значение потенциальной энергии (синусоидальная кривая) и ее значение в параболическом (II) приближении уравнения (4). При больших значениях W W_p пренебрежимо мало и графически соответствует линии III.

ЗАДАЧА 68

Колебательно-вращательная энергия двухатомной молекулы

Рассмотрим в этой задаче двухатомную молекулу с разными ядрами в приближении Борна — Оппенгеймера. Предположим, что потенциальная энергия двухатомной системы (обусловленная взаимодействием электронов и ядер) может быть представлена выражением

$$W_p(r) = -2D \left(\frac{a}{r} - \frac{a^2}{2r^2} \right),$$

где r — расстояние между ядрами, а a и D — постоянные (D — энергия диссоциации молекулы).

1. Напишите не зависящее от времени уравнение Шредингера, характеризующее движение ядер.

2. Напишите в полярных координатах (преимущество которых нужно показать) волновые функции, являющиеся решениями уравнения Шредингера.

3. Напишите уравнение для радиальной части волновой функции $\psi_r(\rho)$, используя две безразмерные величины $\rho = r/a$ и параметр $A^2 = (2\mu a^2/\hbar^2)D$. Проведите аналогию между этой задачей и задачей об атоме водорода. Опирайтесь на эту аналогию при дальнейшем решении задачи.

4. Покажите, что это уравнение имеет решение $\psi_r(\rho)$ вида

$$\psi_r(\rho) = \rho^p \exp(-b\rho) f(\rho).$$

Определите значения постоянных p и b и напишите уравнение, которому должна удовлетворять функция $f(\rho)$.

5. Найдите возможные значения вращательно-колебательной энергии молекулы в функции колебательных квантовых чисел n и вращательных квантовых чисел J .

6. Параметр A велик по сравнению с единицей. При малых значениях n и J найдите подходящее выражение для энергии, включающее члены второго порядка. Объясните этот результат.

РЕШЕНИЕ

1. Уравнение Шредингера для молекулы с ядрами, обозначенными 1 и 2, имеет вид

$$\frac{1}{M_1} \Delta_1 \psi + \frac{1}{M_2} \Delta_2 \psi + \frac{2}{\hbar^2} [W - W_p(r)] \psi = 0.$$

Δ_1 и Δ_2 — операторы Лапласа, выраженные в виде функций координат двух ядер. Вводя приведенную массу

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$$

и межъядерное расстояние $r = r_1 - r_2$, получаем

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ W + 2D \left(\frac{a}{r} - \frac{a^2}{2r^2} \right) \right\} \psi = 0. \quad (1)$$

2. Поскольку потенциал центральный, в полярной системе координат можно произвести разделение переменных. Можно предположить, что

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \psi_r(r) \Phi(\theta, \varphi),$$

и найти уравнение, аналогичное уравнению для атома H, а именно

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi_r}{dr} \right) + \left\{ \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} \left[W + 2D \left(\frac{a}{r} - \frac{a^2}{2r^2} \right) - J(J+1) \right] \right\} \psi_r = 0. \quad (2)$$

3. При подстановке $\rho = r/a$ и $d^2/dr^2 = 1/a^2 (d^2/d\rho^2)$ уравнение (2) принимает вид

$$\rho^2 \frac{d^2\psi_\rho}{d\rho^2} + 2\rho \frac{d\psi_\rho}{d\rho} + \left\{ \frac{2\mu a^2 W}{\hbar^2} \rho^2 + \frac{4D\mu a^2}{\hbar^2} \rho - \frac{2D\mu a^2}{\hbar^2} - J(J+1) \right\} \psi_\rho = 0,$$

или, полагая $A^2 = 2D\mu a^2/\hbar^2$,

$$\frac{d^2\psi_\rho}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\psi_\rho}{d\rho} + \left\{ \frac{A^2}{D} W + \frac{2A^2}{\rho} - \frac{A^2 + J(J+1)}{\rho^2} \right\} \psi_\rho = 0. \quad (3)$$

4. При $\rho \rightarrow \infty$ из (3) получается асимптотическое уравнение

$$\frac{d^2\psi_\rho}{d\rho^2} + \frac{A^2 W}{D} \psi_\rho = 0, \quad (4)$$

для которого подходящим решением является

$$\exp\left(-A \sqrt{\frac{W}{D}} \rho\right),$$

откуда

$$b = A \sqrt{\frac{W}{D}}. \quad (5)$$

С другой стороны, при $\rho \rightarrow 0$ уравнение (3) асимптотически приближается к

$$\frac{d^2\psi_\rho}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\psi_\rho}{d\rho} - \frac{A^2 + J(J+1)}{\rho^2} \psi_\rho = 0 \quad (6)$$

— дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. Обсуждение, аналогичное тому, которое проводилось для атома водорода, показывает, что решение этого уравнения должно характеризоваться величиной p^p , подстановка которой в (6) приводит к уравнению

$$p^2 + p - A^2 - J(J + 1) = 0.$$

Его единственно приемлемым решением будет

$$p = -\frac{1}{2} + \sqrt{A^2 + \left(J + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad (7)$$

поскольку $p > -1$.

Таким образом, решение (3) имеет требуемую форму, а именно

$$\psi_r(\rho) = \rho^p \exp(-b\rho) f(\rho), \quad (8)$$

где p определяется уравнением (7), b — уравнением (5). Подставляя (8) в (3), находим уравнение, которому удовлетворяет $f(\rho)$:

$$f'' + 2f' \left(\frac{p+1}{\rho} - A \sqrt{\frac{W}{D}} \right) + \frac{2}{\rho} \left[A^2 - A \sqrt{\frac{W}{D}} (p+1) \right] = 0.$$

5. Рассуждения, подобные тем, которые проводились в задаче об атоме водорода, приводят к тому, что должно выполняться условие

$$A \sqrt{\frac{D}{W}} - (p+1) = n,$$

где n — положительное целое число. Энергия определяется выражением

$$W = - \frac{DA^2}{[n + 1/2 + \sqrt{A^2 + (J + 1/2)^2}]^2}. \quad (9)$$

6. Если $A^2 \gg n$ и J , получаем

$$\sqrt{A^2 + \left(J + \frac{1}{2}\right)^2} \approx A \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{J + 1/2}{A} \right)^2 \right],$$

и знаменатель в уравнении (9) принимает вид

$$A^2 \left[1 + \frac{n + 1/2}{A} + \frac{1}{2} \left(\frac{J + 1/2}{A} \right)^2 \right],$$

откуда приближенное значение энергии равно

$$W = -D \left[1 - \frac{2(n + 1/2)}{A} - \left(\frac{J + 1/2}{A} \right)^2 \right]$$

или

$$W = -D + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \left(J + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2\mu a^2}, \quad (10)$$

где

$$\omega = \frac{2D}{\hbar} = \hbar \sqrt{\frac{2D}{\mu a^2}}.$$

Первый член в (10) представляет энергию диссоциации (отсчитываемую от значения нулевой энергии без учета колебательной энергии основного состояния). Второй член характеризует энергию гармонических колебаний (нужно удостовериться, что ω имеет размерность частоты). Третий член представляет вращательную энергию.

ЗАДАЧА 69

Спектр атома водорода

I

Квантовая теория излучения спектральной линии. Теория Бора. Применение к излучению атома водорода. Расчет постоянной Ридберга R_H для случая фиксированного ядра и случая с учетом движения ядра.

Численные данные:

$$h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}, \quad c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}, \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}, \quad m = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ кг}.$$

Отношение массы электрона m к массе ядра атома водорода M равно $1/1838$.

II

Найдите общее соотношение для числа длин волн на один сантиметр в излучении, испускаемом атомом водорода при переходе электрона с уровня n на уровень n' .

Численный пример. Вычислите длину волны в сухом воздухе при 15°C и атмосферном давлении для первых четырех линий серии Бальмера (линий H_α , H_β , H_γ , H_δ). Какова длина волны границы серии? Каковы резонансные потенциалы и ионизационный потенциал для атома водорода?

Примите, что показатель преломления сухого воздуха при 15°C и атмосферном давлении равен $1,000280$, а экспериментально полученное значение $R_H = 109\,678 \text{ см}^{-1}$.

III

Спектры ионизованного гелия и дейтерия.

Серия Ридберга и Пикеринга

Численный пример. Вычислите постоянную Ридберга R_D для дейтерия (тяжелого водорода) в случае фиксированного ядра и для случая, учитывающего движение ядра. Отношение массы электрона к массе ядра дейтерия равно $1/3571$.

Принимая, что $R_D = 109\,707\text{ см}^{-1}$, определите длину волны в сухом воздухе при 15°C и атмосферном давлении для первых четырех линий серии Бальмера для дейтерия, аналогичных линиям H_α , H_β , H_γ и H_δ легкого водорода.

IV

Рассмотрите две линии H_α , предполагая, что они излучаются с одинаковой интенсивностью смесью легкого водорода и дейтерия и регистрируются дифракционным спектрографом с плоской отражающей решеткой. Решетка длиной 5 см, имеющая 500 штрихов на 1 мм, освещается через исчезающе узкую щель, находящуюся в фокальной плоскости объектива. Щель параллельна линиям решетки.

Дифрагированный луч наблюдается в телескоп с фокусным расстоянием 40 см в направлении, перпендикулярном решетке.

Каким должен быть угол падения, чтобы изображение щели в третьем порядке дифракции располагалось на перекрестке нитей телескопа? Каково значение угловой дисперсии? Каково линейное расстояние в фокальной плоскости объектива между двумя линиями, различающимися по длине волны на 1 Å ? Каково линейное расстояние между линиями H_α легкого водорода и дейтерия? Каково теоретическое значение разрешающей силы? Какова должна быть оптическая сила окуляра, чтобы разрешающая сила решетки использовалась эффективно? Допустите, что глаз может различать угол величиной $1'$ и входные отверстия объектива коллиматора и телескопа достаточно велики, чтобы не снижать разрешающую силу решетки.

РЕШЕНИЕ

I

В первоначальной теории Бора предполагалось, что электрон описывает вокруг ядра атома водорода, находящегося в основном состоянии (или относительно центра масс), круговые орбиты радиусом r_0 и что кулоновское притяжение

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (1)$$

обеспечивает необходимую центростремительную силу для этой орбиты, которая равна $F' = mv^2/r_0$, и, таким образом,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = mv^2. \quad (2)$$

Электростатическая потенциальная энергия, с учетом (1), имеет вид

$$W_p = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0},$$

а полная энергия равна

$$W_0 = W_p + W_k = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} + \frac{mv^2}{2} = - \frac{c}{8\pi\epsilon_0 r_0} \quad (3)$$

(согласно теореме вириала). Бор определял радиус r_0 при условии, что угловой момент равен $h/2\pi$, произвольно вводя таким образом квантование. Заменяя в (2) v на $h/2\pi mr_0$:

$$r_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \quad (4)$$

и подставляя это значение в уравнение (3), получаем

$$W_1 = - \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2}. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) оказываются совпадающими с уравнением для основного состояния водорода, найденным в квантовой механике. Однако рассуждения, посредством которых оно было здесь получено, не являются удовлетворительными, поскольку для электрона необходимо постулировать круговое движение, чтобы он обладал угловым моментом. Однако известно, что в основном состоянии, как и во всех s -состояниях, угловой момент отсутствует. Кроме того, теория Бора неприменима при попытках распространить ее на возбужденное состояние атома водорода или на атомы более чем с одним электроном.

Пользуясь определением спектрального терма, запишем

$$W_1 = - hcR, \quad (6)$$

откуда

$$R_\infty = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} = \frac{9,108 \cdot 10^{-31} \cdot (1,602 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 16 \cdot (3,14)^2 \cdot 81 \cdot 10^{18}}{8 \cdot (6,625 \cdot 10^{-34})^3 \cdot 2,998 \cdot 10^8} = 109\,915,3 \text{ см}^{-1}.$$

Это значение получается при допущении, что электрон движется вокруг фиксированного ядра. Если учесть одновременное движение электрона и ядра вокруг центра масс, необходимо заменить массу m на приведенную массу

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}.$$

Тогда находим

$$R_H = R_\infty \frac{\mu}{m} = R_\infty \frac{1}{1+m/M} = 109\,855,5 \text{ см}^{-1}. \quad (7)$$

II

Согласно основным постулатам Бора (справедливость которых сохраняется, несмотря на их элементарный характер), излучение и поглощение излучения с частотой ν и энергией $h\nu$ происходят при переходе атома из одного стационарного состояния в другие, квантованные энергии которых определяются для водорода выражением

$$W_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}, \quad (8)$$

где n — положительное целое число. Закон сохранения энергии при переходе с уровня n на уровень n' с излучением ($n' < n$) записывается в виде

$$h\nu = W_n - W_{n'} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Учет уравнения (6) и соотношения $\nu = c\tilde{\nu}_0$ между частотой и спектроскопическим волновым числом $\tilde{\nu}_0 = 1/\lambda_0$ дает

$$\frac{1}{\lambda_0} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где $\lambda_0 = 1/\tilde{\nu}_0$ — длина волны света в вакууме, поскольку в уравнении (6) используется скорость c . В среде с показателем преломления N длина волны $\lambda = \lambda_0/N$. Для линий серии Бальмера $n' = 2$, таким образом, получаем

$$\tilde{\nu}_0 = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) = 109\,678 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\text{H}_\alpha \quad \tilde{\nu}_0 = 109\,678 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 109\,678 \cdot \frac{5}{36} = 15\,233,1 \text{ см}^{-1},$$

$$\lambda_\alpha = 6562,8 \text{ Å};$$

$$\text{H}_\beta \quad \tilde{\nu}_0 = 109\,678 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = 109\,678 \cdot \frac{3}{16} = 20\,564,6 \text{ см}^{-1},$$

$$\lambda_\beta = 4861,3 \text{ Å};$$

$$\text{H}_\gamma \quad \tilde{\nu}_0 = 109\,678 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25} \right) = 109\,678 \cdot 0,21 = 23\,032,4 \text{ см}^{-1},$$

$$\lambda_\gamma = 4340,4 \text{ Å};$$

$$\text{H}_\delta \quad \tilde{\nu}_0 = 109\,678 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36} \right) = 109\,678 \cdot \frac{8}{36} = 24\,372,9 \text{ см}^{-1},$$

$$\lambda_\delta = 4101,8 \text{ Å}.$$

На границе серии $n = \infty$, следовательно,

$$\tilde{\nu}_0 = \frac{R}{4} = \frac{109\,678}{4} = 27\,419,6 \text{ см}^{-1},$$

$$\lambda_\infty = 3646,0 \text{ Å}.$$

Разности резонансных потенциалов, умноженные на заряд e , представляют энергию, необходимую для перехода электрона из основного состояния на уровни с $n = 1, 2, \dots$, причем n имеет конечную величину.

Для первого из этих потенциалов V_1 находим, пользуясь (8) и (6):

$$eV_1 = W_1 - W_2 = \frac{me^4}{8\epsilon_0 h^2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) = hcR \left(1 - \frac{1}{4} \right),$$

$$V_1 = \frac{hcR}{e} \frac{3}{4} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \cdot 1,09678 \cdot 10^4 \cdot 3}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 4} = 10,198 \text{ эВ.}$$

Для второго резонансного потенциала

$$V_2 = \frac{hcR}{e} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} \right) = \frac{hcR}{e} \frac{8}{9} = 12,087 \text{ эВ.}$$

Потенциал ионизации V_i — это такой потенциал, который необходим для перехода электрона с зарядом e с уровня $n_0 = 1$ в состояние $n = \infty$, когда он отрывается от ядра. Записываем

$$eV_i = W_1 = hcR,$$

откуда, пользуясь вычисленным для V_1 значением, получаем

$$V_i = \frac{hcR}{e} = 13,598 \text{ эВ.}$$

Заметим, что энергия ионизации hcR соответствует границе серии Лаймана, $n' = 1$, $n = \infty$, волновое число которой будет тогда $\tilde{\nu}_0 = R$.

III

Атом дейтерия D имеет только один электрон и ядро с таким же зарядом и с массой, вдвое большей массы легкого водорода. Его спектр должен быть идентичен спектру водорода, если пренебречь движением ядра. С учетом этого движения величина приведенной массы изменится и постоянная Ридберга будет равна

$$R_D = R_\infty \frac{1}{1 + (1/3571)} = 109\,884,5 \text{ см}^{-1}.$$

Ионизованный атом гелия He^+ имеет один электрон, массу, в 4 раза большую массы атома водорода, и удвоенный заряд ядра. Учет массы опять производится уравнением (7). Для оценки влияния изменения заряда необходимо удвоить значения силы и кулоновского потенциала, что приводит к умножению значений энергетических уровней (8) на коэффициент 4. В результате

линиям гелия соответствуют волновые числа, определяемые выражением

$$\tilde{\nu}_0 = 4R_{\text{He}} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где

$$R_{\text{He}} = R_{\infty} \frac{1}{1 + m/M_{\text{He}}} = 109\,900,3 \text{ см}^{-1}.$$

Для серии Ридберга $n_0 = 3$, а для серии Пикеринга $n_0 = 4$.

Расчет линий серии Бальмера для дейтерия производится таким же образом, как и для водорода:

$$\sigma_0 = 109\,707 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Находим

$$D_{\alpha} \quad \tilde{\nu}_0 = 15\,237,08 \text{ см}^{-1}, \quad \lambda_0 = 6561,1 \text{ Å},$$

$$D_{\beta} \quad \tilde{\nu}_0 = 20\,570,06 \text{ см}^{-1}, \quad \lambda_0 = 4860,1 \text{ Å},$$

$$D_{\gamma} \quad \tilde{\nu}_0 = 23\,038,47 \text{ см}^{-1}, \quad \lambda_0 = 4339,3 \text{ Å},$$

$$D_{\delta} \quad \tilde{\nu}_0 = 24\,379,33 \text{ см}^{-1}, \quad \lambda_0 = 4100,7 \text{ Å}.$$

Этот расчет можно провести непосредственно, используя уравнение

$$\frac{\Delta \tilde{\nu}_0}{\tilde{\nu}_0} = \frac{\Delta R}{R}$$

и принимая для $\tilde{\nu}_0$ значения, найденные для водорода, для R — значение $109\,678 \text{ см}^{-1}$, также найденное для водорода, и для ΔR — значение $(109\,707 - 109\,678) \text{ см}^{-1}$.

IV

Система представлена на фиг. 69.1. Максимум дифракции третьего порядка располагается в направлении $i_K = 0$. Уравнение решетки определяет угол падения i' :

$$\sin i' = \frac{3\lambda_0}{d}.$$

Принимая, что требуемое изображение относится к длине волны $\lambda_0 = 0,6563 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$, получаем при $d = 0,002 \text{ мм}$

$$\sin i' = \frac{3 \cdot 0,6563 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,98445, \quad i = 79^\circ 52'.$$

Угловая дисперсия при $\cos i_K = 1$ определяется выражением

$$D = \frac{K}{d} = \frac{3}{2 \cdot 10^{-3}} = 1500 \text{ рад/мм}.$$

Линейное расстояние между линиями, отличающимися на $1 \text{ \AA} = 10^{-7} \text{ мм}$, равно

$$fD \cdot 10^{-4} = 400 \cdot 1500 \cdot 10^{-7} = 60 \text{ мм.}$$

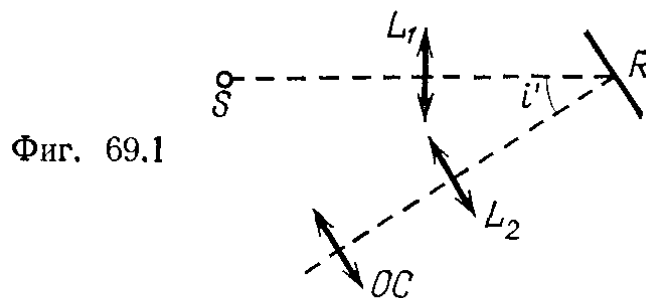
Линейное расстояние между линиями H_α равно

$$400 \cdot 1500 \cdot (6562,8 - 6561,1) \cdot 10^{-7} = 1,02 \text{ мм.}$$

Теоретическая разрешающая сила равна

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nk = 5000 \cdot 5 \cdot 3 = 75\,000.$$

Для того чтобы две линии воспринимались отдельно, необходимо, чтобы изображения находились на угловом расстоянии



$\Delta i \geq \lambda/Nd$. Этот угол должен быть преобразован телескопом до величины, равной по крайней мере $1'$. Используемое увеличение телескопа равно

$$G = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 5}{0,6563 \cdot 10^{-4}} \approx 23.$$

Но $G = 40/f'$, откуда $1/f' = 23/40 = 0,57$ диоптрий.

ЗАДАЧА 70

Спектр нейтрального атома лития

Вспомните, что атом лития имеет один оптический электрон и его основным состоянием является S -состояние ($l = 0$).

I

1. При условии, что ионизационный потенциал $V_i = 5,390 \text{ В}$, найдите:

а) Терм основного состояния T_0 (в см^{-1}), принимая границу ионизации за начало отсчета термов.

б) Длину волны λ_0 в вакууме для границы главной серии при заданном $e/hc = 8,0682 \cdot 10^5$ (в единицах системы СИ).

2. Первый потенциал ионизации, измеренный электрическими методами, оказался равным $V_1 = 1,85 \text{ В}$.

а) Рассчитайте величину соответствующего терма T_1 в см^{-1} . Что можно сказать о точности, с которой в этом случае определяется T_1 ? Сравните ее с точностью определения T_1 спектроскопическими методами.

б) Найдите длину волны линии излучения, соответствующего комбинации этого терма с термом основного состояния.

в) Каким символом должен быть обозначен этот терм (S , P , D , F , ...)?

II

1. Излучение, рассмотренное выше, исследуется с помощью спектрографа с отражающей решеткой. Решетка имеет 1200 штрихов на 1 мм. Спектр образуется в фокальной плоскости линзы L_1 с фокусным расстоянием 2 м. Решетка используется в схеме Литтрова (то есть дифрагированные лучи совпадают с падающими, причем те и другие предполагаются параллельными).

а) Вычислите синус угла i между лучами и нормалью к плоскости решетки, для которой указанные выше условия соблюдаются в первом порядке для длины волны λ_1 .

б) При таком расположении решетки в фокальной плоскости линзы L_1 видны две линии на расстоянии 40 мкм друг от друга. Предполагая, что обе они лежат в первом порядке дифракции, рассчитайте разность их длин волн и соответствующих волновых чисел.

в) Предполагая, что эмиссионные линии бесконечно резкие, найдите минимальную длину штриховой дифракционной решетки, которая дает возможность разрешить эти линии.

г) Как объясняется расщепление линий? Что представляет собой их разность в волновых числах?

III

Допустим, что:

упомянутый дублет был получен путем возбуждения паров лития, находящихся в тепловом равновесии при температуре T ; разрешающая сила спектрографа много больше рассмотренной выше;

при этих условиях эксперимента ширина спектральной линии обусловлена только эффектом Доплера — Физо.

а) Найдите контур линии, т. е. распределение интенсивности как функцию длины волны (или волнового числа).

б) Определите точное значение ее полуширины.

в) До какой температуры можно нагреть пары лития, сохраняя разрешение компонент дублета (т. е. чтобы наибольшая

ширина каждой из них была бы равна расстоянию между рассчитанными выше линиями)?

Примечание. Вспомните, что доля dN/N атомов, компоненты скорости которых в заданном направлении заключены в интервале u и $u + du$, определяется формулой

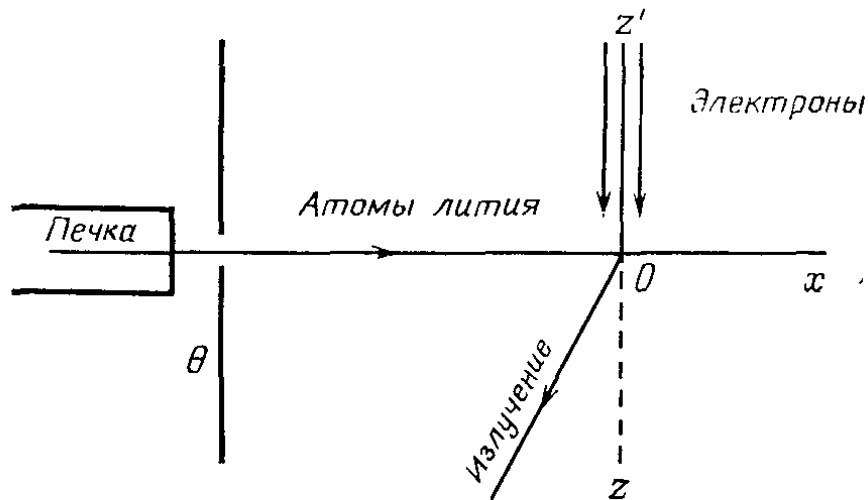
$$\frac{dN}{N} = A \exp\left(\frac{-Mu^2}{2RT}\right) du,$$

где A — постоянная, величину которой нет необходимости точно знать, M — атомный вес, выраженный в граммах (для лития $7 \cdot 10^{-3}$ кг), R — газовая постоянная для идеального газа ($8,32$ Дж $\cdot$ К $^{-1}$).

Примите значения $\ln 2 = 0,69$, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

IV

Рассмотрите теперь пучок атомов лития (фиг. 70.1), проходящий в направлении $x'Ox$, после выхода из малого отверстия, сделанного в стенке нагревателя и коллимированного отверстием в экране. Предположим, что диаметр обоих отверстий



Фиг. 70.1

исчезающе мал. Атомы лития возбуждаются при столкновениях с электронным пучком, направленным по $z'Oz$ перпендикулярно к $x'Ox$ и ускоряющимся в поле с разностью потенциалов, немного большей V_1 . Излучение, распространяющееся в направлении Oy , перпендикулярном к обоим пучкам, направляется на щель спектрографа.

а) Объясните, почему линии здесь получаютя намного тоньше?

б) Если предположить, что все другие причины уширения исключены (разрешающая сила спектрографа, влияние электрического и магнитного полей и т. д.), то снова окажется, что две линии имеют ширину порядка $0,003$ см $^{-1}$.

Что является источником этой остаточной ширины? Какую характеристику можно установить для одного из двух уровней этого перехода? К какому уровню это относится?

V

Оставив рассмотрение дублета, исследуйте линии «резкой» серии ($2P - nS$ -серии).

а) Почему все линии этой серии являются дублетами? Что можно сказать о разности волновых чисел двух линий одного из дублетов этой серии?

б) При рассмотрении первой линии резкой серии обнаруживается, что она является дублетом и что более коротковолновая из этих двух линий имеет длину волны

$$\lambda_2 = 8128,75 \text{ \AA}.$$

Найдите значение в см^{-1} первого терма T_2 соответствующего перехода и расстояние между двумя компонентами в ангстремах.

РЕШЕНИЕ

I

1. Энергия ионизации eV_i соответствует разности между началом отсчета энергии и энергией уровня основного состояния. Энергия терма, имеющего значение $T \text{ см}^{-1}$, равна $W = hcT$.

а) Отсюда для основного состояния записываем

$$eV_i = hcT_0,$$

$$T_0 = \frac{eV_i}{hc}.$$

Значение e/hc дано в единицах системы СИ, поэтому V_i должно получаться в м^{-1} :

$$T_0 = 8,0682 \cdot 10^5 \cdot 5,390 = 4\,348\,700 \text{ м}^{-1} = 43\,487 \text{ см}^{-1}.$$

$$\text{б) } \lambda_0 = \frac{1}{T_0} = 2299 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 2299 \text{ \AA}.$$

2. а) Первый потенциал возбуждения представляет собой энергию, необходимую для возбуждения электрона основного состояния T_0 до уровня T_1 . Таким образом, имеем

$$T_0 - T_1 = 8,0682 \cdot 10^5 \cdot 1,85 = 14\,920 \text{ см}^{-1}$$

и

$$T_1 = 43\,487 - 14\,920 = 28\,567 \text{ см}^{-1}.$$

Если дано $V_1 = 1,85 \text{ В}$, это означает, при отсутствии других указаний, что погрешность составляет $\pm 0,005 \text{ В}$, следовательно,

погрешность в определении T_1 равна

$$8,0682 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \approx 4000 \text{ см}^{-1},$$

т. е. относительная ошибка имеет порядок 0,1 (для уровня основного состояния). Эта погрешность намного больше той, которая может быть получена спектроскопическим методом, где при измерении длины волны достигается точность порядка 0,1 Å, т. е. порядок относительной погрешности составляет 10^{-4} — 10^{-5} .

$$\text{б) } \lambda_1 = \frac{1}{T_0 - T_1} = 6710 \text{ Å}.$$

Эта линия — первая в главной серии и является аналогом D -линии натрия. Она расположена в красной области спектра и обуславливает характерный цвет пламени, в котором присутствуют соли лития.

в) Терм основного состояния — это S -терм ($l = 0$); согласно правилу отбора, он может комбинировать только с термом P ($l = 1$): $\Delta l = 1$. Следовательно, терм T_1 является P -термом.

II

1. а) Уравнение дифракционной решетки при $i = i'$ в первом порядке дает

$$2 \sin i_1 = \frac{\lambda}{d} \quad \text{или} \quad \sin i_1 = \frac{6710 \cdot 10^{-7} \cdot 1200}{2} = 0,40.$$

б) Расстояние l , на котором находятся две линии в фокальной плоскости, связано с их угловым расстоянием δi соотношением $\delta l = f \delta i$, где f — фокусное расстояние L_1 , откуда

$$\delta i_1 = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{2} \text{ рад.}$$

С другой стороны,

$$\frac{\delta i_1}{\delta \lambda} = \frac{1}{d \cos i_1},$$

следовательно,

$$\delta \lambda = d \cos i_1 \delta i_1 = \frac{1}{1200} 0,9165 \frac{4 \cdot 10^{-5}}{2} = 0,153 \cdot 10^{-7} \text{ мм или } 0,153 \text{ Å}.$$

Имеем $\tilde{\nu} = 1/\lambda$, откуда $d\tilde{\nu} = -\delta\lambda/\lambda^2$

$$|\delta\tilde{\nu}| = \frac{0,153}{(6710)^2} = \frac{0,153}{0,4502 \cdot 10^8} = 0,339 \cdot 10^{-8} \text{ Å}^{-1} \text{ или } 0,340 \text{ см}^{-1}.$$

в) При используемом предположении ширина линий обусловлена только дифракцией и конечностью длины решетки. Теоретическое разрешение, определяемое как

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = NK,$$

позволяет рассчитать N , а следовательно, длину плоской решетки. При $K = 1$ имеем

$$L = \frac{N}{n} = \frac{\lambda}{n\delta\lambda} = \frac{6710 \cdot 10^{-8}}{1200 \cdot 0,153 \cdot 10^{-8}} = 36,6 \text{ мм.}$$

г) Дублет обусловлен спин-орбитальным взаимодействием. Разность волновых чисел, умноженная на hc , представляет собой расстояние между двумя энергетическими уровнями спина оптического электрона в магнитном поле, обусловленном его орбитальным движением.

III

а) Поперечный эффект Доплера незначителен, и уширение линии обусловлено только эффектом Доплера, вызванным движением со скоростью u вдоль направления наблюдения. Для атома изменения волновых чисел при этом определяются уравнением

$$\frac{\Delta\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}} = \frac{\Delta\nu}{\lambda} = \pm \frac{u}{c}, \quad (1)$$

где знак $+$ относится к случаю, когда атом движется по направлению к наблюдателю. В идеальном газе (каким предполагаются пары лития) распределение атомных скоростей является статистическим и число атомов с массой m , у которых скорость в данном направлении заключена в интервале между u и $u + du$, при равновесной температуре T определяется соотношением

$$dN = C \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right) du, \quad (2)$$

где C — константа, а k — постоянная Больцмана. Это выражение является результатом распределения по скоростям Максвелла—Больцмана.

При

$$\frac{m}{k} = \frac{\aleph m}{\aleph k} = \frac{M}{R},$$

где $\aleph$ — число Авогадро, уравнение (2) можно записать в виде

$$dN = C \exp\left(-\frac{Mu^2}{2RT}\right) du, \quad (3)$$

что является выражением, заданным в задаче.

Чтобы найти распределение интенсивности как функции волнового числа, заметьте, что интенсивность излучения в интервале $d\tilde{\nu}$ пропорциональна числу атомов, излучение которых имеет волновые числа внутри этого интервала, поскольку излучение не является когерентным. Кроме того, интервал $d\tilde{\nu}$ связан с интер-

валом du скоростей атомов. Подставляя в (3) значение u , взятое из (1), получаем выражение для относительной интенсивности $I(\tilde{\nu})$

$$I(\tilde{\nu}) = I_0 \exp \left[- \frac{Mc^2}{2RT\tilde{\nu}_0^2} (\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 \right], \quad (4)$$

где $\tilde{\nu}_0$ — волновое число центра линии, соответствующее нулевой скорости. Кривая, представляющая $I(\tilde{\nu})$ (фиг. 70.2), симметрична относительно $\tilde{\nu}_0$ вследствие хаотического распределения скоростей. Это кривая Гаусса.

б) Интенсивность, равная половине максимума I_0 , соответствует таким волновым числам $\tilde{\nu}'$, что

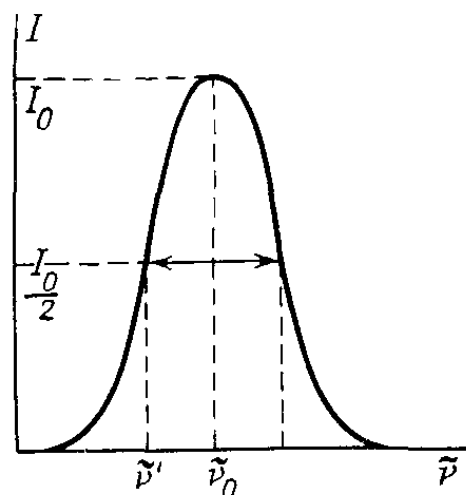
$$\frac{1}{2} = \exp \left[- \frac{Mc^2}{2RT\tilde{\nu}_0^2} (\tilde{\nu}' - \tilde{\nu}_0)^2 \right],$$

откуда

$$(\tilde{\nu}' - \tilde{\nu}_0)^2 = \frac{2RT\tilde{\nu}_0^2}{Mc^2} \ln 2.$$

Полуширина задается интервалом волновых чисел

$$\begin{aligned} 2 |(\tilde{\nu}' - \tilde{\nu}_0)| &= 2\Delta\tilde{\nu}', \\ 2\Delta\tilde{\nu}' &= \frac{2\tilde{\nu}_0}{c} \sqrt{\frac{2RT \ln 2}{M}}. \end{aligned} \quad (5)$$



Фиг. 70.2

в) Две компоненты, рассмотренные в п. II, становятся неразрешенными, если ширина каждой из них больше интервала волновых чисел между ними. Поэтому, воспользовавшись результатом, полученным в II, 1, б ($0,34 \text{ см}^{-1}$), получим

$$0,34 = 2 \cdot \frac{14\,920}{3 \cdot 10^8} \sqrt{\frac{2 \cdot 8,32T \cdot 0,59}{7 \cdot 10^{-3}}},$$

откуда максимальная температура, при которой возможно разрешение компонент, равна

$$\sqrt{T} = 83,8, \quad T = 7022 \text{ К.}$$

IV

а) Атомы в атомном пучке обладают скоростью, изменяющейся около среднего значения, но с вполне определенным направлением. Поскольку скорость перпендикулярна направлению наблюдения, продольный эффект Доплера исключен. Поперечный эффект Доплера здесь не может быть причиной уширения линий, а эффекты столкновений и взаимодействия атомов невелики в разреженном газе, составляющем пучок. Поэтому линии будут узкими.

б) Если предыдущие причины уширения линий, связанные с аппаратурой, исключаются, остается только естественная ширина линий, существование которой следует из соотношения неопределенности $\Delta W \Delta t \approx h$. Неопределенность в измерении энергии, при использовании параметров, заданных в условии задачи, равна

$$\Delta W = hc \Delta \tilde{\nu} = h \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^{-3}.$$

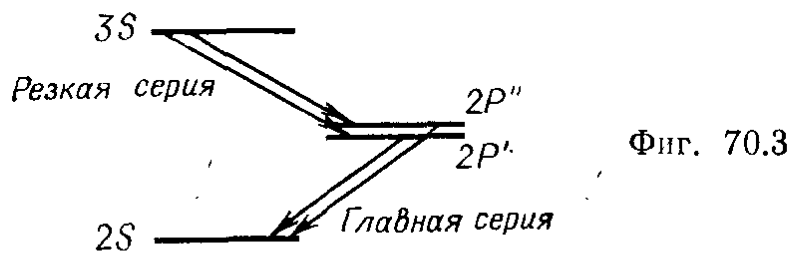
Следовательно, неопределенность во времени соответствующего перехода

$$\Delta t \approx \frac{\Delta W}{h} \approx 9 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

После перехода атом лития возвращается в основное состояние, где время его жизни при отсутствии возмущений бесконечно. Интервал Δt характеризует верхний уровень и его среднее время жизни.

V

а) Линии резкой серии излучаются при переходе с уровня nS ($n = 3, 4, \dots$) на $2P$ -уровень. Кроме того, этот последний



уровень расщепляется в результате спин-орбитального взаимодействия на уровни $2P'$ и $2P''$, как видно из II, г (фиг. 70.3); однако с S -уровнями этого не происходит, так как для них орбитальный момент равен нулю. Расщепление дублетов резкой серии, выраженное в волновых числах, равно

$$\Delta \tilde{\nu} = (2P' - nS) - (2P'' - nS) = 2P' - 2P''.$$

Это значение является константой. С другой стороны, для линий главной серии, образующихся при переходах оптического электрона между nP ($n = 2, 3, 4, \dots$)-уровнями и уровнем $2S$ основного состояния

$$\Delta \tilde{\nu} = (nP' - 2S) - (nP'' - 2S) = nP' - nP''.$$

Этот интервал является переменным, поскольку он уменьшается с возрастанием n .

б) Волновое число рассматриваемого излучения

$$\tilde{\nu}_2 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{8128,75} = 12\,302 \text{ см}^{-1}.$$

Расстояние между двумя компонентами этой линии такое же, как между компонентами первой линии главной серии (фиг. 70.3), т. е. соответствует рассчитанному в вопросе II, 1, б интервалу $\Delta\tilde{\nu} = 0,34 \text{ см}^{-1}$. В длинах волн оно равно

$$|\Delta\lambda| = |\Delta\tilde{\nu}| \cdot \lambda^2 = 0,34 \cdot (8130)^2 = 0,223 \text{ Å}.$$

ЗАДАЧА 71

Эффект Доплера. Ширина спектральной линии

I

Первые спектральные линии первых двух серий атома водорода имеют следующие длины волн (в Å):

Серия Лаймана: 1215,7...

Серия Бальмера: 6563,07; 4861,33...

Кроме того, граница серии Бальмера соответствует 3645,9 Å.

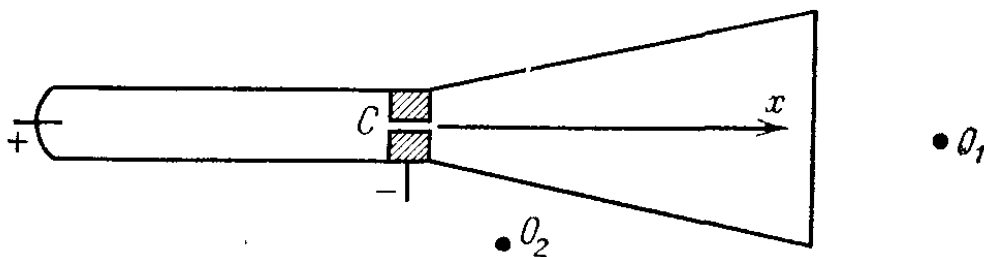
1. Вспомните выражение, с помощью которого вычисляются эти длины волн, и вкратце объясните его значение.

2. Рассчитайте потенциал ионизации V_i атома водорода.

3. Пользуясь комбинационным принципом, рассчитайте длину волны первой линии третьей серии (Пашена) водорода.

II

1. Атомы водорода, возбуждаемые при электрическом разряде в трубке низкого давления, вылетают через отверстие в катодe C (фиг. 71.1) и движутся в направлении Cx. Рассмотрите



Фиг. 71.1

H_{β} -линию, помещая спектроскоп сначала в точку O_1 , а затем в O_2 . Для длины волны H_{β} -линии получатся два значения: $\lambda_1 = 4855,45 \text{ Å}$ в O_1 и $\lambda_2 = 4861,33 \text{ Å}$ в O_2 . Вкратце объясните этот результат. Вычислите скорость атомов вдоль Cx, используя преобразование Лоренца. Используйте систему координат $S(xyz)$, связанную с атомами, движущимися с постоянной скоростью u относительно системы координат $S'(x'y'z')$, связанной с лабораторией.

Аргумент синусоидальной функции $\sin 2\pi\nu(t - x/c)$ инвариантен относительно преобразования Лоренца. При нахождении u пренебрегите u^2/c^2 .

2. Щель спектроסקопа помещается в O_2 и через нее перпендикулярно Sx проходит свет, излучаемый атомами на отрезке атомного пучка, заключенного между x и $x + dx$. При смещении спектроסקопа параллельно Sx наблюдается экспоненциальное уменьшение интенсивности H_β -излучения, по закону $I = I_0 \exp(-Kx)$, при $K = 138 \text{ м}^{-1}$. I_0 — интенсивность пучка при выходе из катода. Рассчитайте среднее время жизни τ атомов водорода в возбужденном состоянии, т. е. время, требующееся для уменьшения интенсивности излучения в $1/e$ раз от ее первоначальной величины. Найдите естественную ширину линии H_β , предполагая, что время жизни нижнего уровня намного больше времени жизни возбужденного состояния.

III

Рассмотрите излучение линии H_β атомами в обычной разрядной трубке при 27°C . Проанализируйте излучение с помощью интерферометра Фабри — Перо, у которого расстояние между пластинками увеличивается до тех пор, пока сохраняется видимость полос. Предельный порядок интерференции равен 50 000. Какова ширина линии, если предположить, что контур линии прямоугольный? Находим ширину, намного большую естественной ширины. Предполагая, что все атомы движутся с одинаковой скоростью, т. е. со средней тепловой скоростью $\langle v \rangle$, рассчитайте ширину линии, обусловленную эффектом Доплера, и сравните ее с экспериментально полученным значением.

Вспомните, что в кинетической теории газов $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/\pi A}$, где R — газовая постоянная для идеального газа, T — абсолютная температура, а A — масса атома.

РЕШЕНИЕ

I

1.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (1)$$

R — постоянная Ридберга, n_0 — целое число, характеризующее спектральную серию ($n_0 = 1$ для серии Лаймана, $n_0 = 2$ для серии Бальмера и т. д.), а n — члены бесконечного ряда целых чисел, характеризующие линии каждой серии и начинающиеся с чисел, непосредственно следующих за n_0 .

2. Энергия ионизации — это энергия, которую надо сообщить атому Н, чтобы переместить электрон, находящийся в основном состоянии, из поля ядра в бесконечность, причем так, чтобы в бесконечности он не обладал кинетической энергией. Запишем

$$W_i = eV_i = h\nu_i;$$

здесь e — заряд электрона, ν_i — частота границы серии Лаймана, так что, используя выражение (1) при $n_0 = 1$ и $n = \infty$, имеем

$$V_i = \frac{hRc}{e}.$$

R можно вычислить, используя заданное выше значение граничной частоты серии Бальмера; при $n_0 = 2$ и $n = \infty$ уравнение (1) дает

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R}{4},$$

поэтому

$$V_i = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10^8}{3645,9 \cdot 10^{-10} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}} = 13,6 \text{ В.}$$

3. Первая линия серии Пашена ($n_0 = 3$) имеет длину волны

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right).$$

Поскольку первые две линии серии Бальмера имеют длины волн

$$\frac{1}{\lambda_1} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\lambda_2} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right),$$

то

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}$$

и

$$\lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{6563,07 \cdot 4861,33}{1701,74} = 18748,0 \text{ Å.}$$

II

1. Ионы H^+ , ускоренные электрическим полем между A и C , захватывают в C электроны и с этой приобретенной скоростью движутся в вакууме. В системе координат излучающего атома частота $\text{H}\beta$ -излучения равна ν , а в лабораторной системе ν' . Монохроматическая волна, распространяющаяся вдоль Sx , в системе S описывается уравнением

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \exp \left[2\pi j \nu \left(t - \frac{x}{c} \right) \right].$$

Ее фаза $\nu(t - x/c)$ инвариантна относительно преобразования Лоренца, поэтому

$$\nu' \left(t' - \frac{x'}{c} \right) = \nu \left(t - \frac{x}{c} \right);$$

обозначения со штрихами относятся к системе S' . Уравнения Лоренца

$$\nu' = \gamma (x - ut), \quad t' = \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}},$$

дают

$$t' - \frac{x'}{c} = \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right) - \gamma \left(\frac{x}{c} - \frac{ut}{c} \right) = \gamma \left(1 + \frac{u}{c} \right) \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

откуда

$$\nu = \nu' \gamma \left(1 + \frac{u}{c} \right). \quad (2)$$

Частота больше для наблюдателя в точке O_1 из-за продольного эффекта Доплера. Если пренебречь u^2/c^2 и, таким образом, считать $\gamma = 1$, поперечный эффект Доплера (который, хотя и очень мал, в принципе имеет место для наблюдателя в точке O_2) исчезает. Таким образом,

$$\nu' = \frac{c}{\lambda_1}, \quad \nu = \frac{c}{\lambda_2}$$

1

$$\lambda_2 = \lambda_1 \left(1 + \frac{u}{c} \right),$$

откуда

$$u = c \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \right) = \frac{(4861,33 - 4855,45) 3 \cdot 10^8}{4855,45} = 3,635 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

2. Интенсивность наблюдаемого свечения пропорциональна числу атомов, содержащихся в объеме, ограниченном плоскостями с расстоянием dx между ними, которые высвечиваются в единицу времени (так как излучение некогерентно). Это число пропорционально также числу атомов, еще сохранивших возбужденное состояние, в том же объеме. Спонтанное излучение уменьшается со временем по закону

$$I = I_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right).$$

Сравнение с выражением, данным в условии задачи, показывает, что

$$Kx = \frac{t}{\tau}$$

или

$$\tau = \frac{t}{Kx} = \frac{1}{Ku} = \frac{1}{138 \cdot 3,635 \cdot 10^5} \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

При решении уравнения Шредингера предполагается, что возбужденные уровни атома имеют точные значения энергии. Соотношение неопределенности $\Delta W \cdot \Delta t \approx h$ показывает, что, поскольку $\Delta W = 0$, $\Delta t = \infty$ и эти состояния являются стационарными. Однако только для основного состояния время жизни бесконечно. Предыдущий эксперимент показывает, что конечная величина времени жизни τ ведет к неопределенности в энергии возбужденного уровня, равной $\Delta W \approx h/\tau$. Поскольку $\Delta W = h\Delta\nu$, естественная ширина линии H_β равна

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ Гц}$$

или

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{c} |\Delta\nu| = \frac{0,236 \cdot 5}{3} = 10^{-13} \text{ м} = 0,39 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}.$$

III

Видимость полос пропадает, если при разности хода $\delta = r\lambda$ порядок интерференции r для краев спектрального участка излучения, содержащегося в луче, отличается на 1, так что

$$\Delta\delta = r \Delta\lambda = \lambda \Delta r,$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{r} = \frac{4861,33}{50\,000} = 0,097 \text{ \AA}.$$

Этот интервал намного больше вычисленной выше естественной ширины линии.

При вычислении уширения, вызванного эффектом Доплера, воспользуемся уравнением (2), данным в задаче для скорости теплового движения, и найдем

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi A}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,32 \cdot 10^3 \cdot 300}{3,14}} = 2530 \text{ м/с.}$$

Скорость $\langle v \rangle$, подобно скорости u , рассмотренной в II, относится к движению атома по направлению к наблюдателю и в обратном направлении. Ширина линии, таким образом, находится из соотношения

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2\langle v \rangle}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

т. е.

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{2\langle v \rangle}{c} = 4861,33 \cdot \frac{2 \cdot 2530}{3 \cdot 10^8} = 0,082 \text{ \AA}.$$

Эта величина гораздо ближе к экспериментальному значению, чем естественная ширина линии.

ЗАДАЧА 72

Поляризация резонансного излучения

I

Резонансное излучение $\lambda = 2537 \text{ \AA}$, испускается атомом ртути при переходе электрона из возбужденного состояния 6^3P_1 в основное состояние 6^1S_0 . Последний уровень обычно занят двумя электронами.

1. Объясните значение символов, обозначающих эти два уровня. Определите для них значения множителей Ланде.

2. Рассмотрим газ $^{198}_{80}\text{Hg}$ (чтобы избежать некоторых сложностей, связанных с наличием ядерного спина), помещенный в прозрачную трубку при достаточно низком давлении, чтобы можно было пренебречь столкновением атомов. Трубка находится в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Найдите расщепление уровней $^3P_1$ и $^1S_0$ в результате эффекта Зеемана, статистический вес каждого из подуровней и переходы, разрешенные правилами отбора.

3. В рассмотренном выше газе возбуждается излучение резонансной линии, и это излучение наблюдается с помощью прибора, способного различать компоненты изучаемого спектра. Допустим, что расщепление уровней, производимое полем $\mathbf{B}$, мало по сравнению с тепловой энергией атомов. Определите частоты, состояния поляризации и относительные интенсивности излучения, если оно наблюдается: а) перпендикулярно линиям поля $\mathbf{B}$, б) параллельно этим линиям и в) под углом 30° к ним.

Для этого воспользуйтесь аналогией между излучением квантового дипольного излучателя и осциллятора Герца. Вспомните, что круговой излучатель состоит из двух линейных осцилляторов, колеблющихся с одинаковой амплитудой.

Сравните энергии излучения для различных переходов и определите значения относительных вероятностей для этих спонтанных переходов.

II

Пары ртути, не испытывающие никакого возбуждения и находящиеся при достаточно низкой температуре, чтобы можно было предполагать, что все атомы находятся в основном состоянии, освещаются параллельным пучком излучения $\lambda = 2537 \text{ \AA}$, распространяющегося в направлении Ox . Можно линейно поляризовать этот пучок, придавая электрическому полю волны фиксированное направление в плоскости yOz . Будем наблюдать вторичное резонансное излучение в направлении Oz через анализатор. Газ помещается в однородное магнитное поле $\mathbf{B}$ с регулируемым направлением и такой интенсивностью, что величина

зеemanовского расщепления мала по сравнению с тепловой энергией и шириной резонансной линии, испускаемой источником возбуждения. Будем наблюдать излучение в направлении Oz , пользуясь анализатором без дисперсии. Определите состояние поляризации для излучения при следующих ориентациях электрического и магнитного полей:

$$\mathbf{E}: \quad Oy \quad Oy \quad Oy \quad Oz \quad Oz$$

$$\mathbf{B}: \quad Oy \quad Ox \quad Oz \quad Oy \quad Ox$$

При $\mathbf{B}$, параллельном Oy , определите угол θ , который должен составлять вектор $\mathbf{E}$ с направлением поля $\mathbf{B}$ в плоскости yO , так чтобы излучение, наблюдаемое вдоль Oz было деполаризованным.

III

Рассмотрим теперь пары натрия. Зная, что D_1 -переход — переход единственного оптического электрона с уровня $3^2P_{1/2}$ на уровень $3^2S_{1/2}$, начертите диаграмму излучения для этих уровней в случае эффекта Зеемана. Определите относительную интенсивность линий излучения и относительные вероятности их появления. Заметьте, что, когда $\mathbf{B} = 0$, испускаемое излучение содержит единственную неполяризованную линию, и путем последующих рассуждений покажите, что при наблюдении в поперечном направлении между суммами интенсивностей π -компонент и σ -компонент существует простое соотношение. Кроме того, примите во внимание, что спектры Зеемана симметричны относительно частоты ν_0 как по интенсивности, так и по частоте.

Поместите пары натрия в устройство, аналогичное устройству для паров ртути в разд. II, и облучите их параллельным пучком излучения D_1 , распространяющимся вдоль направления Oy . Каково состояние поляризации резонансного излучения в присутствии поля $\mathbf{B}$, направленного вдоль Oy ?

Покажите, что если возбуждающее излучение имеет круговую поляризацию, то при прочих равных условиях облучение паров приведет через неограниченный промежуток времени к тому, что все атомы натрия заселяют подуровень $m_J = +1/2$ нижнего состояния.

РЕШЕНИЕ

I

1. Согласно принятой терминологии, число n обозначает электронную оболочку оптического электрона. В основном состоянии два валентных электрона атома ртути занимают подоболочку $6s$.

Оба они обладают нулевым орбитальным моментом количества движения $l = 0$ (S -состояние), поэтому полный орбитальный момент L также равен нулю. Они имеют противоположные спины $s = \pm 1/2$, так что полный спиновый момент S равен нулю. Поэтому полный момент $J = L + S$ тоже равен нулю. Общий символ $^{2S+1}L_J$ для терма основного состояния есть $^1S_0$. В возбужденном состоянии один из электронов остается в исходном s -состоянии ($l = 0$); другой переходит в состояние $l = 1$, после чего полный момент количества движения $L = 1$. Такое состояние обозначается символом P . Спины же этих двух электронов параллельны, и результирующий спин $S = 1$, поэтому $2S + 1 = 3$. Полный момент количества движения, который может принимать значения $L + 1$, L и $L - 1$, равен 1.

Множитель Ланде определяется по формуле

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

В основном состоянии $J = S = L = 0$, $g = 1$. В возбужденном состоянии $J = S = L = 1$, $g = 2$.

2. Магнитное поле не действует на основное состояние, в котором момент количества движения, а следовательно, и магнитный момент равны нулю. Проекция момента $J = 1$ возбужденного состояния на направление $\mathbf{B}$ может принимать значения $m_J = +1, 0$ или -1 . Вырождение уровня, соответствующее различным значениям m_J для заданного значения J , снимается под действием поля $\mathbf{B}$, причем каждый подуровень имеет один и тот же статистический вес.

Разрешенные переходы подчиняются правилу

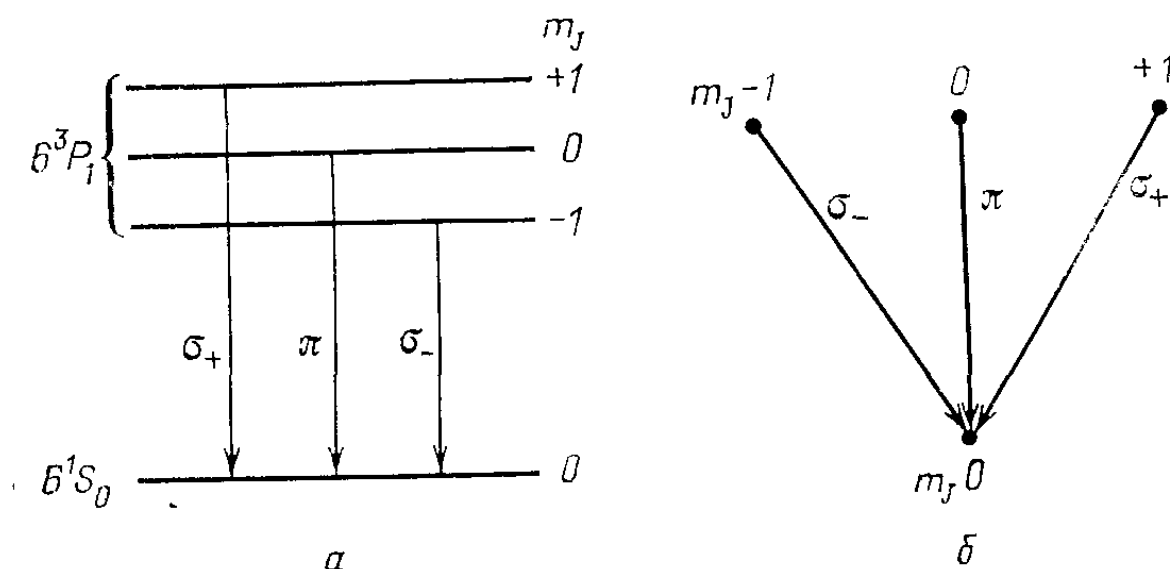
$$\Delta m_J = +1, \text{ или } 0, \text{ или } -1.$$

На фиг. 72.1 показана диаграмма этих переходов. На диаграмме Гротриана (фиг. 72.1, а) представлены энергетические уровни. На диаграмме Гейзенберга (фиг. 72.1, б) на одной горизонтали представлены уровни с теми же значениями m_J , но по ней можно непосредственно проследить различие между вертикальными π -переходами ($\Delta m_J = 0$) и переходами σ_+ ($\Delta m_J = +1$) и σ_- ($\Delta m_J = -1$).

3. На фиг. 72.1, а и 72.1, б показано, что переход из состояния $^3P_1$ в состояние $^1S_0$ соответствует излучению нормального триплета Зеемана: одна линия (π), частота которой ν_0 имеет ту же величину, что и в отсутствие поля, и две другие (σ), которые симметрично смещены на величину

$$\pm \Delta \nu = \frac{e}{4\pi m_e} B. \quad (1)$$

Перпендикулярно направлению поля наблюдаются три линейно-поляризованные линии: π -линия с колебаниями, параллельными $\mathbf{B}$, и σ_+ и σ_- -линии с колебаниями, перпендикулярными $\mathbf{B}$. В направлении, параллельном полю, π -линия исчезает, а σ -линии имеют круговые поляризации в противоположных направлениях. Эти результаты, следующие из квантовой теории, в простых случаях можно связать с классической теорией излучения электрического диполя. Колебание линейного гармонического диполя $\mathbf{d}$ можно разложить (фиг. 72.2) на колебание π



Фиг. 72.1

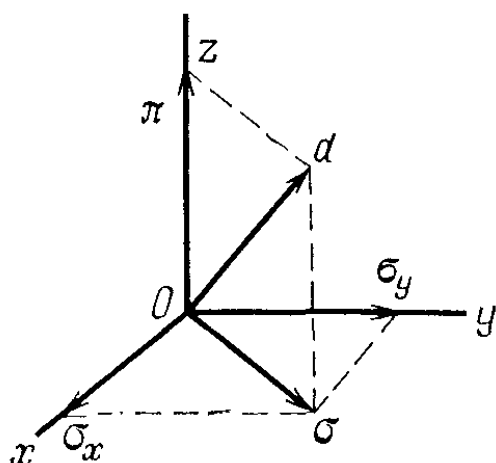
вдоль основной оси Oz и колебание σ в плоскости xOy . Это последнее колебание может быть представлено в виде результирующей двух круговых колебаний в противоположных направлениях σ_+ и σ_- (см. теорию Френеля оптической вращательной способности).

Предыдущее расщепление принимает симметричную форму относительно поля $\mathbf{B}$, оси вращения и плоскости, перпендикулярной этой оси. Направим $\mathbf{B}$ по оси Oz . Колебания вдоль оси Oz не подвержены влиянию поля $\mathbf{B}$, направленного параллельно смещению зарядов диполя. Круговые осцилляторы испытывают воздействие силы Лоренца в направлениях, противоположных для σ_+ и σ_- . Следовательно, можно заключить, что их частоты должны изменяться на одинаковую величину симметрично относительно неизменного π -излучения. [Нас здесь не интересует классический расчет, из которого вытекает уравнение (1).]

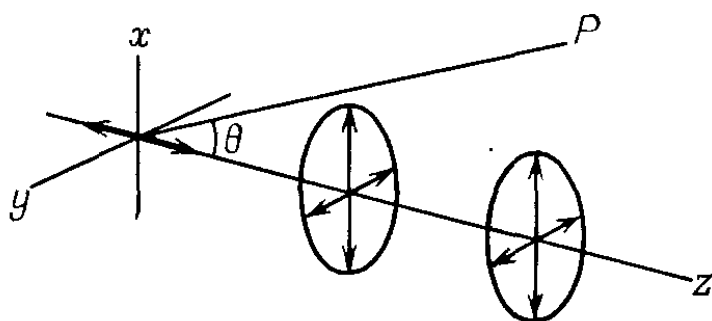
Если рассмотреть теперь множество дипольных осцилляторов, ориентированных хаотически, то три компоненты, π , σ_x и σ_y (фиг. 72.2) или же π , σ_+ и σ_- , будут иметь одинаковые значения. Если рассматривать испускаемое в заданном направлении излучение, когда диполи подвергаются некоторому направленному воздействию, то наблюдаемое поперечное электрическое

поле состоит из двух компонент, перпендикулярных к направлению наблюдения, в то время как компонента, направленная вдоль этого направления, равна нулю. Наблюдаемая интенсивность, таким образом, равна $2I$, где I — максимальная интенсивность излучения, относящегося к каждой из трех компонент.

Если осцилляторы помещены в однородное магнитное поле, то в направлении поля Oz наблюдается излучение, испускаемое σ_+ и σ_- -компонентами, но только не π -компонентой. При этом интенсивность равна $2I$. При наблюдении перпендикулярно линиям поля, например вдоль Ox , можно видеть максимальную



Фиг. 72.2



Фиг. 72.3

величину излучения с интенсивностью I от π -компоненты и излучения от линейных составляющих каждой из компонент σ , параллельных Oy , с интенсивностью $I/2$. Тогда полная наблюдаемая интенсивность равна $2I$ (фиг. 72.3).

Наблюдение в направлении OP , составляющем угол θ с Oz и лежащем, например, в плоскости zOx (фиг. 72.3), показывает, что интенсивность π -компоненты равна $I \sin^2 \theta$; для составляющих σ , параллельных Oy , интенсивность равна $I/2 \cos^2 \theta$ и для составляющих σ , параллельных Ox , $I/2 \cos^2 \theta$. Излучение π оказывается линейно-поляризованным в плоскости xOz и перпендикулярно к OP . σ -излучение эллиптически-поляризовано, и отношение осей эллипса равно $\cos \theta$.

При $\theta = 30^\circ$, $\sin^2 \theta = 1/4$, $\cos^2 \theta = 3/4$. Линия с частотой ν_0 имеет интенсивность $I/4$, а каждая из линий с частотой $\nu_0 \pm \Delta\nu$ имеет интенсивность

$$\frac{I}{2} + \frac{I}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{8} I.$$

Отношение

$$\frac{I_\pi}{I_\sigma} = \frac{2}{7}.$$

Следовательно, полная интенсивность равна $2I$.

Как можно видеть, подуровни Зеемана имеют одинаковый статистический вес. Если вдобавок магнитные энергии малы по сравнению с тепловой энергией kT , то все подуровни заселены одинаково. Ориентация орбиты не может влиять на интенсивность излучения, и энергия, излучаемая при переходе с любого подуровня Зеемана, имеет одну и ту же величину, независимо от числа m_J , характеризующего уровень. С другой стороны, величина энергии σ -излучения при прочих равных условиях вдвое больше, чем для π -излучения, так как σ -излучение имеет две линейные компоненты. Поскольку интенсивности π -линии и каждой из σ -линий одинаковы, то отношение вероятностей переходов равно

$$\frac{A_{\pi}}{A_{\sigma}} = 1.$$

II

По предположению, ширина линии возбуждающего излучения обусловлена всеми зеемановскими компонентами. В поглощающем паре под действием поля $\mathbf{B}$ все подуровни Зеемана уровня 6^3P_1 расщепляются. Если поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ параллельны Oy и перпендикулярны направлению наблюдения Oz , поглощается только π -компонента резонансной линии и возбуждается только подуровень $m_J = 0$ уровня 6^3P_1 . Вторичное излучение при переходе между этим подуровнем и основным состоянием отвечает π -колебанию (фиг. 72.1) и резонансное излучение линейно-поляризовано параллельно Oy .

Если $E = E_y$ и $B = B_x$, то в этом случае поглощаются и вторично излучаются две σ -компоненты и резонансное излучение имеет круговую поляризацию с Ox в качестве оси. Кроме того, как можно видеть при наблюдениях, проводимых вдоль Oz , линейная поляризация параллельна Oy .

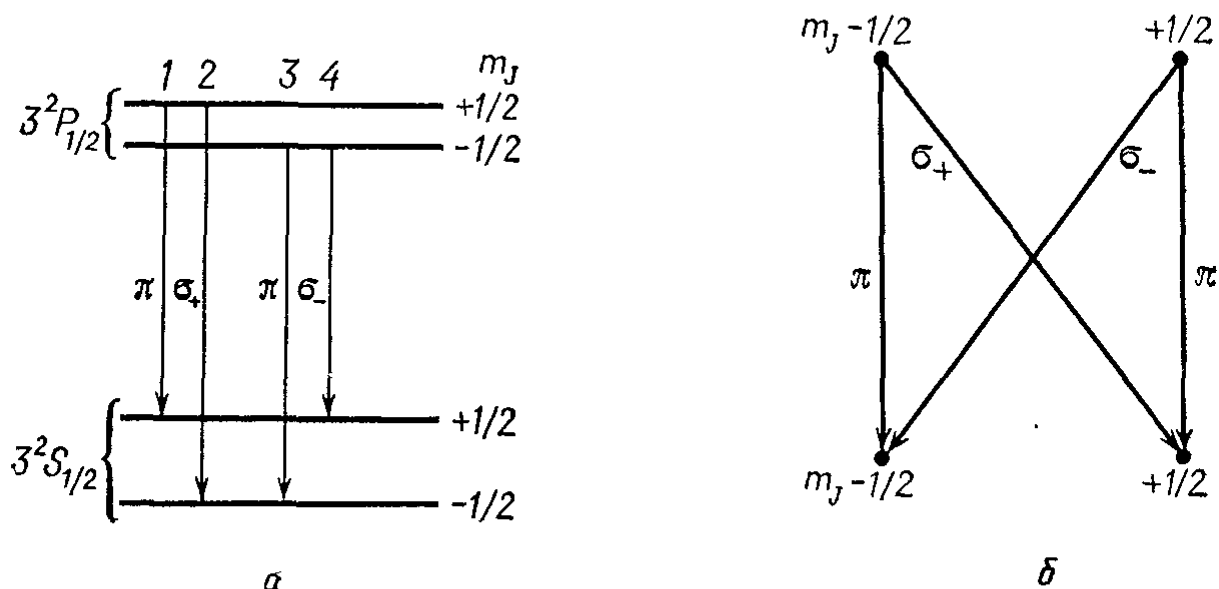
При $E = E_y$ и $B = B_z$ π -компонента не наблюдается, присутствуют одновременно только компоненты σ_+ и σ_- и свет не поляризован.

При $E = E_z$ и $B = B_y$ возбуждаются только уровни $m_J = \pm 1$, вторично излучаются компоненты σ_+ и σ_- . Наблюдается излучение, линейно-поляризованное в направлении Ox . Подобно этому, наблюдаются колебания, параллельные Oy , если $E = E_z$ и $B = B_x$.

Если E составляет угол θ с B (вдоль Oy) в плоскости yOz , то сравнение с рассмотренными выше первым и четвертым случаями показывает, что энергии возбуждения π -компоненты и σ -компонент пропорциональны соответственно $E^2 \cos^2 \theta$ и $E^2 \sin^2 \theta$. Следовательно, при $\cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ линейные компоненты, направленные вдоль Ox и Oy , при наблюдении вдоль Oz равны и свет не поляризован. При этом $\theta = 54^\circ 44'$.

III

Оптический электрон имеет спин $1/2$, вследствие чего уровни ^3S и ^3P являются дублетами ($2s + 1 = 2$). Для уровня S $l = 0$ и $j = 1/2$. Для уровня P $l = 1$ и $j = 1/2$ или $3/2$. Переход $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ дает D_1 -линию, а переход $P_{3/2} \rightarrow S_{1/2}$ — линию D_2 . Нас здесь интересует первая из них. Поскольку множитель Ланде равен 2 для уровня S и $3/2$ — для уровня P , четыре возможных перехода,



Фиг. 72.4

разрешенных правилами отбора, дают четыре линии с разными частотами, обозначенные на диаграмме на фиг. 72.4, а номерами 1, 2, 3 и 4.

π -компонента и σ -компоненты при наблюдении в поперечном направлении, оказываются линейно-поляризованными в двух перпендикулярных направлениях. В предельном случае, при $\mathbf{B} = 0$, излучение не поляризовано и необходимо, чтобы интенсивность π -компонент была равна интенсивности σ -компонент:

$$\sum I_{\pi} = \sum I_{\sigma}. \quad (2)$$

Результат, полученный в I, 3, согласуется с этим. Для D_1 -линии, поскольку спектры Зеемана симметричны, имеем

$$I_1 = I_3 \quad \text{и} \quad I_2 = I_4.$$

С другой стороны, уравнение (2) дает

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4,$$

следовательно,

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4.$$

Таким образом, вероятности спонтанных переходов находятся в отношении

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = 1 : 2 : 1 : 2,$$

так как 1 и 3 являются π -линиями, а 2 и 4 — σ -линиями.

При облучении паров натрия излучением E_y в поле B_y возбуждаются π -переходы. Два верхних подуровня заселяются одинаково, и возвращение в основное состояние осуществляется посредством π - и σ -переходов с одинаковой интенсивностью. Следовательно, наблюдаемое излучение не поляризовано.

При облучении светом, поляризованным по кругу в заданном направлении, например в правом, атомы подуровня $m_J = -1/2$ уровня S возбуждаются до подуровня $m_J = +1/2$ верхнего уровня.

Следовательно, переход из основного состояния происходит между двумя подуровнями, но в соответствии со значениями вероятностей перехода $2/3$ возбужденных атомов возвращаются на исходный подуровень с излучением σ -линии, а $1/3$ — на подуровень $m_J = +1/2$ с излучением π -линии. Эти последние атомы никогда не будут возбуждаться падающим излучением, и их число в принципе непрерывно возрастает.

ЗАДАЧА 73

Спектральные термы двухэлектронных атомов

Рассмотрим атом с несколькими электронами, каждый из которых обладает орбитальным моментом количества движения $\mathbf{G}_l$ и спиновым моментом $\mathbf{G}_s$. Пусть орбитальные моменты, с одной стороны, и спиновые — с другой, комбинируют, давая полные угловые моменты $\mathbf{G}_L$ и $\mathbf{G}_S$. Существенно различные атомные энергетические состояния соответствуют различным значениям L и S . Моменты же $\mathbf{G}_L$ и $\mathbf{G}_S$ комбинируют, давая полный момент $\mathbf{G}_J$. Каждый энергетический уровень атома — или спектральный терм — обозначается символом $^{2S+1}L_J$.

I

Определите символы возможных термов для двух «неэквивалентных» электронов, то есть электронов, квантовые числа которых n и l различаются и которые поэтому принадлежат к различным подболочкам. Рассмотрите разные случаи, когда каждый из двух электронов может относиться к состояниям s , p или d .

II

Определите символы возможных термов для двух «эквивалентных» электронов, т. е. электронов с одинаковыми значениями n и l .

Примите во внимание принцип Паули. Рассмотрите случаи, когда имеются s -электроны, а затем — p -электроны.

III

Определите символы термов основного состояния для элементов от $H(Z=1)$ до $Ne(Z=10)$. При этом учтите следующие эмпирические правила Гунда: а) самые нижние термы соответствуют максимальному значению S , а максимальное значение L согласуется с предшествующим значением S с учетом принципа Паули и б) $J = L - S$ для элементов, имеющих менее половины электронов из числа эквивалентных электронов, и $J = L + S$ для элементов, содержащих более половины эквивалентных электронов.

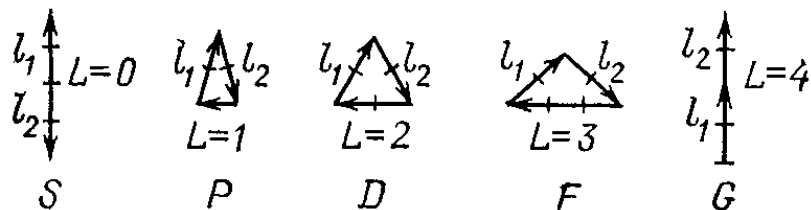
РЕШЕНИЕ

Моменты количества движения электронов связаны связью Рассела — Саундерса.

Результирующие $\mathbf{G}_S = \sum \mathbf{G}_s$, $\mathbf{G}_L = \sum \mathbf{G}_l$ и $\mathbf{G}_J = \mathbf{G}_L + \mathbf{G}_S$ определяются по схеме Рассела — Саундерса, и результаты квантуются.

I

В случае когда n и l различаются для двух электронов, возможны все комбинации. Например, для двух d -электронов ($l_1 = l_2 = 2$) возможные значения L отличаются на целые числа



Фиг. 73.1

и лежат между $l_1 - l_2 = 0$ и $l_1 + l_2 = 4$. Возможными термами являются S , P , D , F и G . На фиг. 73.1 даются результаты приближенного векторного представления $\mathbf{G}$.

Нетрудно найти, что для всех рассматриваемых электронных связей значения L равны:

$$ss : 0; \quad sp : 1; \quad sd : 2; \quad pp : 0, 1, 2; \quad pd : 1, 2, 3.$$

Что касается спина, поскольку $s_1 = \pm 1/2$ и $s_2 = \pm 1/2$, то $S = 1$ или 0^1) и мультиплетность каждого из термов равна $2S + 1 = 1$ (синглетные состояния) или 3 (триплетные состояния).

Остается определить J . В синглетных состояниях $\mathbf{G}_S = 0$, $\mathbf{G}_J = \mathbf{G}_L$ и $J = L$. Для триплетных состояний $S = 1$, каким бы

¹⁾ Не надо путать S с символом для состояния $L = 0$.

ни было значение L . Диаграмма, подобная фиг. 73.1, показывает, что J может принимать только значения $L - 1$, L и $L + 1$.

Возможные символы термов представлены в табл. 73.1.

Таблица 73.1

Электроны	Синглетные термы	Триплетные термы
ss	$^1S_0$	$^3S_1$
sp	$^1P_1$	$^3P_0^3P_1^3P_2$
sd	$^1D_2$	$^3D_1^3D_2^3D_3$
pp	$^1S_0^1P_1^1D_2$	$^3S_1^3P_0^3P_1^3P_2^3D_1^3D_2^3D_3$
pd	$^1P_1^1D_2^1F_3$	$^3P_0^3P_1^3P_2^3D_1^3D_2^3D_3^3F_2^3F_3^3F_4$
dd	$^1S_0^1P_1^1D_2^1F_3^1G_4$	$^3S_1^3P_0^3P_1^3P_2^3D_1^3D_2^3D_3^3F_2^3F_3^3F_4^3G_3^3G_4^3G_5$

II

Два эквивалентных электрона, имеющие одинаковые квантовые числа n и l , должны отличаться либо своим квантовым числом m , либо числом s .

Для s -электронов $l = 0$ и $m = 0$; квантовые числа двух рассматриваемых электронов, таким образом, равны $+1/2$ и $-1/2$, следовательно, $S = 0$, и, поскольку $L = 0$, единственный возможный терм — это $^1S_0$. Триплетное состояние запрещено.

Для двух p -электронов положение сложнее. В табл. 73.2 приведены возможные np -подоболочки и возможные распределения двух электронов с учетом их спина. Конфигурации $\uparrow\downarrow$ и $\downarrow\uparrow$ эквивалентны.

Таблица 73.2

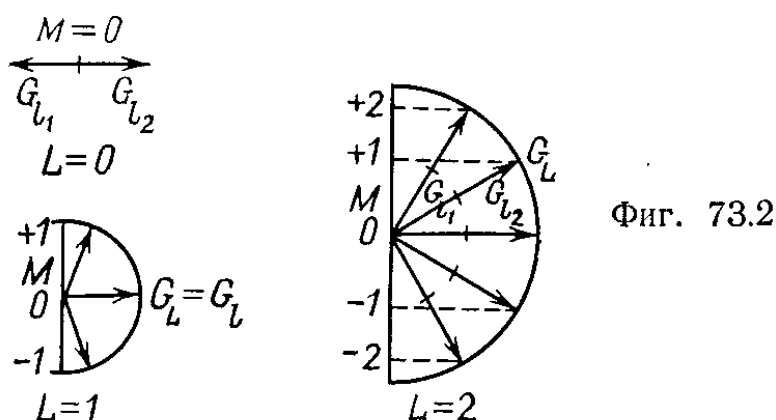
Конфигурация	$m = +1$	$m = 0$	$m = -1$	$M = \sum m$	$S = \sum s$	L	Терм
1		$\uparrow\downarrow$		0	0	0	^1S
2	$\uparrow\downarrow$			+2	0	2	^1D
3			$\uparrow\downarrow$	-2	0	2	^1D
4	$\uparrow$	$\downarrow$		+1	0	2	^1D
5		$\uparrow$	$\downarrow$	-1	0	2	^1D
6	$\uparrow\uparrow$		$\downarrow\downarrow$	0	0	2	^1D
7	$\uparrow$	$\uparrow\uparrow$		+1	1	1	^3P
8		$\uparrow$	$\uparrow\uparrow$	-1	1	1	^3P
9	$\uparrow$		$\uparrow$	0	1	1	^3P

Имеем, как в разделе 1, $L = 0, 1$ или 2 , т. е. S -, P - или D -состояния. Квантовое число $M = \sum m$ соответствует проекции G_L на ось z .

При $L = 0$ $M = 0$ можно получить только для $m_1 = m_2 = 0$. Следовательно, спины противоположны и имеет место состояние $^1S_0$ (конфигурация 1).

При $L = 2$ возможны следующие значения M : $+2, +1, 0, -1$ и -2 . Первое получается из условия $m_1 = m_2 = +1$ (конфигурация 2), а последнее — из $m_1 = m_2 = -1$ (конфигурация 3). Таким образом, спины противоположны, и имеем состояние $^1D_2$.

Такой же терм снова появляется при противоположных спинах для $M = +1$ при комбинации $m_1 = +1$ и $m_2 = 0$ (конфигурация 4); для $M = 0$ при $m_1 = +1$ и $m_2 = -1$ (конфигурация 6) и для $M = -1$ при $m_1 = -1$ и $m_2 = 0$ (конфигурация 5).



При $L = 1$ M принимает значения $+1, 0$ и -1 . На этот раз этим значениям соответствуют конфигурации 7, 8 и 9 с $S = 1$, и тем самым ^3P -термы, которые распадаются на $^3P_1$ -, $^3P_2$ - и $^3P_3$ -подуровни, как было показано в разд. I.

На фиг. 73.2 показаны геометрические построения, относящиеся к квантовому числу M .

III

Для атома H, имеющего один $1s$ -электрон, основное состояние соответствует терму ^2S .

Для атома He два $1s$ -электрона образуют заполненную K -оболочку с основным состоянием ^1S .

У атома Li третий электрон является $2s$ -электроном, и его основное состояние ^2S .

У атома Be два $2s$ -электрона имеют противоположные спины, и его терм — ^1S .

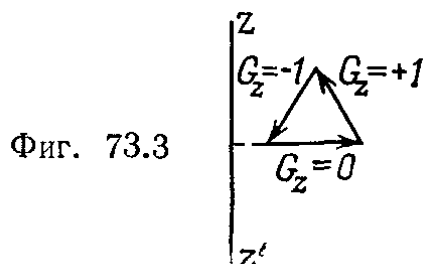
У атома B пятый электрон является $2p$ -электроном, следовательно, его терм — ^2P .

Для атома C, который имеет два $2p$ -электрона, возможные термы были определены в разд. II. Правила Гунда дают для основного состояния триплетный терм, т. е. ^3P .

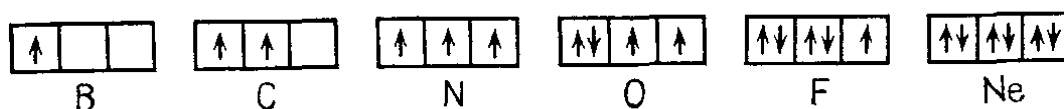
Для атома N максимальное значение S равно $3/2$, что соответствует параллельным спинам для трех $2p$ -электронов, каждый из которых в результате занимает одно из трех квантовых $2p$ -со-

стояний. Тогда G_L равно нулю (фиг. 73.3). Терм основного состояния — ^4S .

У атома O четвертый p -электрон может занимать только один из p -уровней, на котором уже имеется электрон, следовательно, $S = 1$. Полный орбитальный момент обусловлен четвертым электроном, поскольку, как можно было видеть, другие три дают нуль. Терм основного состояния есть ^3P .



Для того чтобы охарактеризовать атом F, лучше сначала рассмотреть Ne, который имеет заполненный подуровень p и, таким образом, равные нулю орбитальный и спиновый моменты, и основное состояние ^1S . Если теперь удалить один электрон,



Фиг. 73.4

чтобы вернуться к структуре атома F, можно видеть, что $L = l = 1$ и $S = s = 1/2$, и, таким образом, основное состояние — ^2P .

Значение J равно S для первых четырех элементов, потому что $L = 0$. При переходе от B к Ne, когда оболочка $2p$ завершается, значение J определяется вторым правилом Гунда, для B и C $J = L - S$, а для O и F $J = L + S$.

Таблица 73.3

Элемент	H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
Атомный номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	$1/2$	0	$1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	1	$1/2$	0
L	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
J	$1/2$	0	$1/2$	0	$1/2$	0	$3/2$	2	$3/2$	0
Терм основного состояния	$^2S_{1/2}$	$^1S_0$	$^2S_{1/2}$	$^1S_0$	$^2P_{1/2}$	$^3P_0$	$^4S_{3/2}$	$^3P_2$	$^2P_{3/2}$	$^1S_0$

Итак, получены символы, указанные в табл. 73.3, для термов основного состояния (фиг. 73.4).

ЗАДАЧА 74

Эффект Зеемана для двухэлектронного атома

В многоэлектронных атомах, рассматривавшихся в предыдущей задаче, компоненты углового момента подчиняются правилам Рассела — Саундерса. Используйте обозначения S и L для спиновых и орбитальных моментов и J — для полного момента количества движения. Величина магнитного момента атома связана с полным моментом количества движения, как и в одноэлектронном случае, через множитель Ланде, наличие которого приводит к магнитной спиновой аномалии.

I

Получите общее выражение для магнитного момента атома в фиксированном стационарном состоянии.

Считая магнетон Бора равным единице, найдите магнитный момент для следующих атомов в их основном состоянии: H, He, Li, Ne и Na. Как можно экспериментально проверить эти значения?

II

1. Рассмотрите эмиссионный спектр стронция (гомолог Be с двумя оптическими электронами в O -оболочке) при помещении атома в слабое магнитное поле. Графически изобразите уровни Зеемана для следующих переходов и укажите разрешенные переходы:

$$\text{а) } \lambda = 4678 \text{ \AA} \quad 10^1 F_3 \rightarrow 7^1 D_2,$$

$$\text{б) } \lambda = 4962 \text{ \AA} \quad {}^3 D_3 \rightarrow 6^3 P_2,$$

$$\text{в) } \lambda = 4892 \text{ \AA} \quad {}^3 F_4 \rightarrow 7^3 D_3.$$

Вспомните, что правила отбора для квантового числа m_J такие же, как и в случае одноэлектронного атома, но при этом ΔJ не может быть равно нулю. Есть ли среди рассмотренных переходов такие, которые дают нормальный эффект Зеемана?

Покажите, что структура линии в) спектра Зеемана очень близка к структуре а), а не к структуре б). Дайте этому объяснение.

2. Рассчитайте расстояние в волновых числах между π - и σ -компонентами линии (в) в магнитном поле 30 000 Э. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $e/m_e = 1,67 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

РЕШЕНИЕ

I

По схеме Рассела — Саундерса $S = \sum s$, $L = \sum l$ и $J = S + L$. Модуль J равен $\sqrt{J(J+1)}\hbar$, таким образом,

$$M = g \sqrt{J(J+1)} \mu_B, \quad (1)$$

где g — множитель Ланде, μ_B — магнетон Бора.

Обратитесь к задаче 73, в которой приведены основные состояния атомов и вычислите величину g , пользуясь выражением

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (2)$$

Находим:

Таблица 74.1

Атом	H	He	Li	Be	Na
Z	1	2	3	4	11
S	$1/2$	0	$1/2$	0	$1/2$
L	0	0	0	0	0
J	$1/2$	0	$1/2$	0	$1/2$
Терм	$^2S_{1/2}$	$^1S_0$	$^2S_{1/2}$	$^1S_0$	$^2S_{1/2}$
$\sqrt{J(J+1)}$	$\sqrt{3/4}$	0	$\sqrt{3/4}$	0	$\sqrt{3/4}$
g	2	1	2	1	2
M	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$

В расчетах для Na примите во внимание, что L -оболочка является завершенной и ее моменты S , L и J равны нулю, как было показано для K -оболочки He.

Эксперимент Штерна — Герлаха (и его современный вариант Рэби) позволяет измерить значение M в основном состоянии.

II

1. J , m_J , g принимают значения, приведенные для рассматриваемых уровней в табл. 74.2 (главное квантовое число его не является важным).

Таблица 74.2

Уровень	$^1F_3$	$^1D_2$	$^3P_2$	$^3D_3$	$^3F_4$
J	3	2	2	3	4
m_J	—3 до +3	—2 до +2	—2 до +2	—3 до +3	—4 до +4
g	1	1	$3/2$	$4/3$	$5/4$

Число подуровней Зеемана равно числу значений m_J , и их расщепление пропорционально g . В верхних частях фиг. 74.1, 74.2 и 74.3 изображены эти уровни для трех рассматриваемых линий.

Разрешенные переходы подчиняются правилам отбора

$$\Delta m_J = 0, \text{ или } +1, \text{ или } -1.$$

Эти три линии ведут себя различным образом.

Для линии а) множитель Ланде одинаков для обоих уровней, поэтому расщепление зеемановских уровней одно и то же. В результате пять переходов, разрешенных правилами отбора, имеют одно и то же волновое число, что позволяет наблюдать нормальный триплет. Каждая из линий, соответствующих $\Delta m_J = \pm 1$, относится к расщеплению, симметричному относительно линии $\Delta m_J = 0$ и равному в см^{-1}

$$\Delta \bar{\nu} = 0,467 B, \quad (3)$$

где B — магнитное поле, действующее на атом.

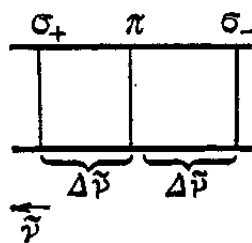
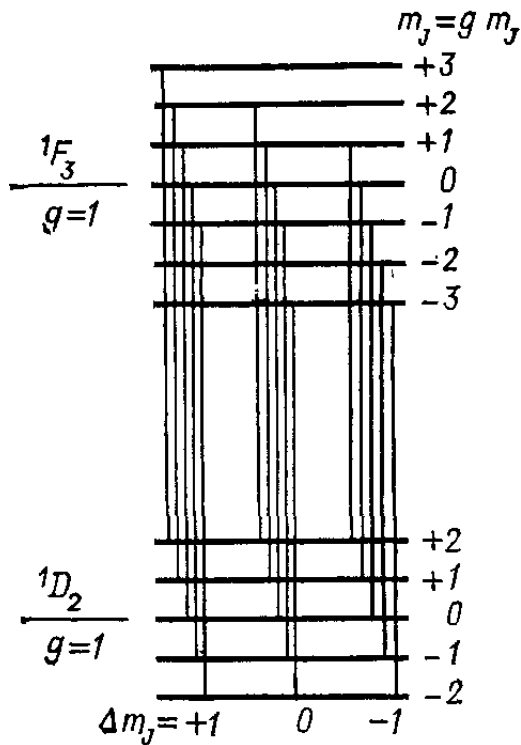
Для линий б) и в) начальные и конечные состояния имеют различные множители Ланде. Все линии, соответствующие разрешенным переходам, различны. Линия $0 \rightarrow 0$ не смещается под действием магнитного поля. Волновое число отщепленной зеемановской линии относительно $0 \rightarrow 0$ линии [при измерении величина нормального расщепления (3) принимается за единицу] определяется разностью между числами, написанными с правой стороны уровней на фиг. 74.3 и 74.2.

Например, для линии б) находим

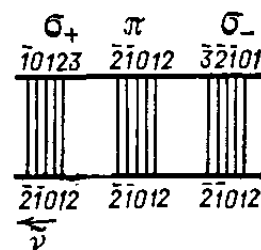
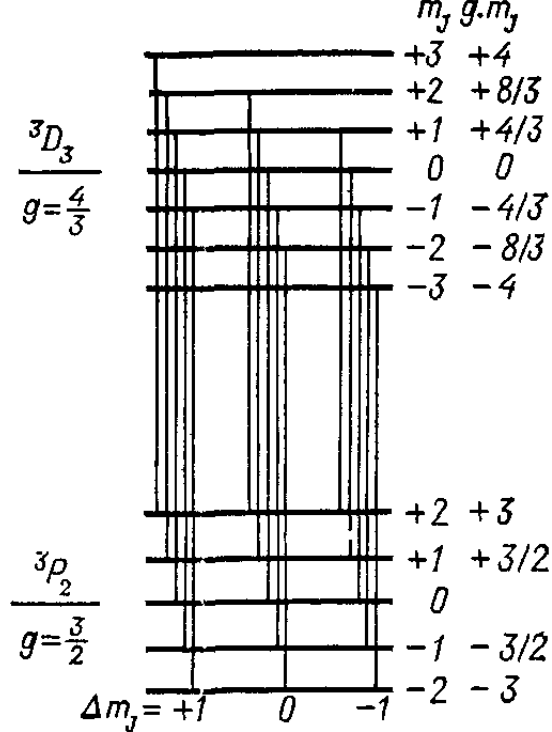
$$\begin{aligned} \Delta m_J = 0 \quad & 1 \rightarrow 1: \quad -\frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{6}; \quad 2 \rightarrow 2: \quad -\frac{8}{3} + 3 = \frac{2}{6}; \\ \Delta m_J = +1 \quad & \bar{3} \rightarrow \bar{2}: \quad 4 - 3 = \frac{6}{6}; \quad \bar{2} \rightarrow \bar{1}: \quad \frac{8}{3} - \frac{3}{2} = \frac{7}{6}; \\ & \bar{1} \rightarrow 0: \quad \frac{4}{3} - 0 = \frac{8}{6}; \\ & 0 \rightarrow 1: \quad 0 + \frac{3}{2} = \frac{9}{6}; \quad 1 \rightarrow 2: \quad -\frac{4}{3} + 3 = \frac{10}{6}. \end{aligned}$$

Можно легко проверить, что расщепление при $\Delta m_J = -1$ симметрично расщеплению при $\Delta m_J = +1$. В целом каждому из трех разрешенных значений соответствует группа из пяти линий, удаленных друг от друга на $1/6$ часть нормального расщепления.

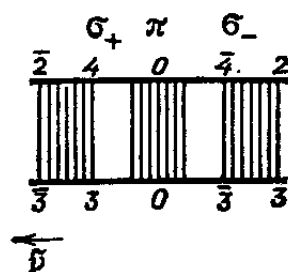
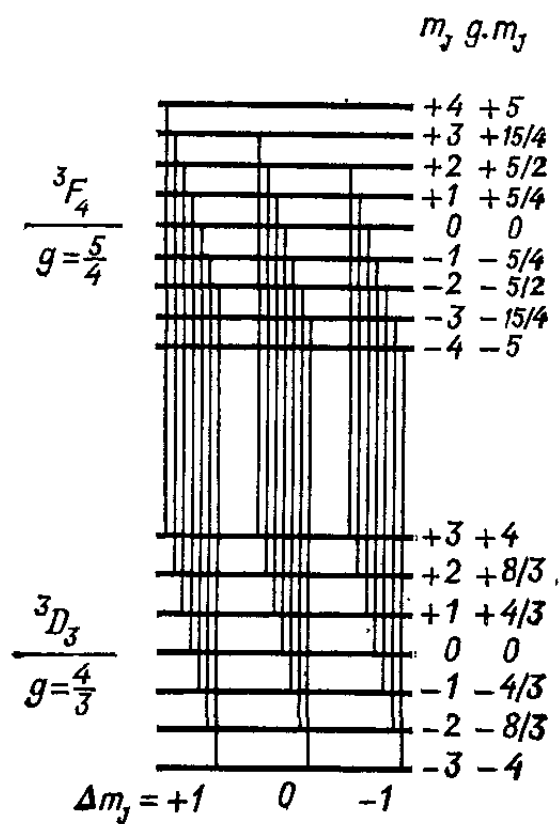
Для линии в) также имеет место симметричное распределение в виде трех групп, состоящих из семи линий, причем расщепление двух линий группы составляет $1/12$ нормального расщепления (3). Структура линии в) очень близка к структуре линии б) нормального триплета, так как множители Ланде рассматриваемых линий близки к единице.



Фиг. 74.1



Фиг. 74.2



Фиг. 74.3

2. Расщепление π - и σ -компонент линии в) составляет $1/12$ нормального расщепления. Для поля 0,3 Т уравнение (3) дает

$$\Delta\tilde{\nu} = 0,467 \cdot 0,3 \cdot \frac{1}{12} = 0,0117 \text{ см}^{-1},$$

т. е. расщепление трудно обнаружить.

ЗАДАЧА 75

Спектры рентгеновских лучей

Здесь рассматриваются спектры поглощения и излучения молибдена в рентгеновской области. Для этого можно использовать рентгеновский спектрограф.

I

Кратко опишите устройство и действие рентгеновского спектрографа.

II

1. Объясните механизм поглощения рентгеновских лучей элементом с высоким атомным номером Z . Почему требуется постоянная экранирования? Найдите волновые числа краев первых трех границ поглощения (или скачков поглощения) для молибдена. Сначала пренебрегите их тонкой структурой и считайте, что постоянная Ридберга приблизительно равна $R = 1,1 \times 10^5 \text{ см}^{-1}$. При расчете поглощения рентгеновских лучей можно принять, что постоянная экранирования $S_K = 3,5$ для K -границы, $S_L = 14$ для L -границы и $S_M = 25,4$ для M -границы.

2. Изложите теорию линейчатого излучения в рентгеновской области спектра для атомов с высоким атомным номером. Выведите закон Мозли. Найдите волновые числа для линий K_α и K_β молибдена. По закону Мозли допускается, что для перехода с M - или L -уровня на K -уровень можно принять значение постоянной экранирования $S_K = 1$.

Покажите, что можно получить приблизительно одинаковые значения волновых чисел K_α - и K_β -линий, если взять разности волновых чисел краев K , L и M поглощения (пренебрегая тонкой структурой).

3. Покажите, как можно усовершенствовать предыдущую теорию, чтобы объяснить тонкую структуру эмиссионных линий и границу поглощения рентгеновских лучей. Покажите, что энергетические уровни тонкой структуры можно представить уравнением

$$\frac{W}{Rch} = - \left[\frac{(Z - C)^2}{n^2} + \frac{\alpha^2 (Z - C'_x)^4}{n^3} \left(\frac{1}{J + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right], \quad (1)$$

где C и C'_x — эмпирические константы экранирования, зависящие от квантовых чисел рассматриваемых переходов. В этом выражении α — постоянная тонкой структуры, а другие обозначения носят обычный характер.

Начертите уровни K , L и M молибдена. Дайте правила отбора для переходов между этими уровнями и укажите на диаграмме разрешенные переходы.

4. Найдите волновые числа границ поглощения молибдена L_I , L_{II} и L_{III} . Примите

$$C = 14, \quad C'_{L_I} = 2, \quad C'_{L_{II}, L_{III}} = 3,5, \quad \alpha^2 = 5,3 \cdot 10^{-5}.$$

Объясните происхождение дублета экранирования.

5. Найдите расщепление спинового дублета в молибдене:

$$\Delta \nu_{K\alpha_1 K\alpha_2} = \nu_{K\alpha_1} - \nu_{K\alpha_2}.$$

Для этого воспользуйтесь уравнением тонкой структуры.

III

Объясните происхождение анодного сплошного эмиссионного спектра рентгеновских лучей.

Рассмотрите поток электронов, ускоряемых разностью потенциалов 100 кВ и падающих на молибденовый анод. Найдите при этих условиях выраженную в волновых числах границу сплошного эмиссионного спектра.

РЕШЕНИЕ

II

1. Когда атомное число Z велико, электронные оболочки K , L , M ..., соответствующие значениям 1, 2, 3 ... главного квантового числа n , заполняются в соответствии с принципом Паули. Поглощение рентгеновского кванта $h\nu$ с энергией порядка 10^4 эВ приводит не к переходу электрона с глубокого уровня на уже занятый более высокий уровень, а к удалению этого электрона, т. е. к ионизации атома. Необходимая для этого работа равна энергии кулоновского взаимодействия электрона с ядром, если нет других электронов, и определяется выражением для энергетического уровня атома водорода (задача 69):

$$W_n = \frac{\mu e^4 Z^2}{8\epsilon_0 h^2} \frac{1}{n^2} = \frac{chZ^2 R}{n^2}.$$

Здесь μ — приведенная масса системы электрон — ядро. Приближенно она равна массе электрона m_e , если атомный номер, а следовательно, и массовое число, имеют большое значение. Постоянная Ридберга в результате принимает значение R_∞ .

Практически же электроны, занимающие более и менее глубокие энергетические уровни, создают потенциал, который уменьшает значение потенциала ядра W_n на величину, существенно зависящую от n . Для учета этого пользуются формулой

$$W'_n = \frac{chR}{n^2} (Z - C_n)^2,$$

где C_n — постоянная экранирования, зависящая от уровня n . При этом в первом приближении пренебрегают тонкой структурой, которая будет рассматриваться в вопросе 4.

Для оценки постоянной C_n примените метод Хартри. Потенциальная энергия электрона на расстоянии r_0 от атомного ядра определяется выражением

$$4\pi\epsilon_0 W_p(r_0) = \frac{Ze^2}{r_0} - \frac{4\pi e^2}{r_0} \int_0^{r_0} \psi^2(r) r^2 dr - \frac{4\pi e^2}{\langle r \rangle} \int_{r_0}^{\infty} \psi^2(r) r^2 dr.$$

Последние два члена описывают эффект экранирования, причем предполагается, что плотность электронного заряда $\rho(r)$ имеет сферически-симметричное распределение относительно ядра. Второй член соответствует эффекту внутреннего экранирования, следующего из хорошо известной в электростатике теоремы о независимости потенциала от внутреннего распределения заряда. Третий член, относящийся к внешнему экранированию, имеет другую зависимость. Он всегда много меньше второго члена. Например, для K -электрона эффект экранирования другим электроном в K -оболочке меньше единицы (в единицах Z), которой он был бы равен при концентрации заряда одного из электронов на расстоянии, меньшем r_0 . Что касается восьми L -электронов, то, поскольку их среднее расстояние $\langle r \rangle$ от ядра имеет порядок $4r_0$, их вклад в экранирование, который был бы нулевым, если бы они были всегда удалены от ядра на расстояние, большее r_0 , и имели сферическую симметрию, является небольшим. То же справедливо для восемнадцати M -электронов и т. д.

Волновые числа описываются выражением

$$\tilde{\nu}_n = \frac{1}{\lambda_n} = \frac{R(Z - C_n)^2}{n^2}.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\tilde{\nu}_K = \frac{1,1 \cdot 10^5 (42 - 3,5)^2}{1^2} = 16\,305 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1},$$

$$\tilde{\nu}_L = \frac{1,1 \cdot 10^5 (42 - 14)^2}{2^2} = 2156 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1},$$

$$\tilde{\nu}_M = \frac{1,1 \cdot 10^5 (42 - 25,4)^2}{3^2} = 313 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}.$$

2. K_α -линия возникает при переходе $L \rightarrow K$ ($n_1 = 2 \rightarrow n_2 = 1$), а K_β при переходе $M \rightarrow K$ ($n_1 = 3 \rightarrow n_2 = 1$). Таким образом, при $C_K = 1$

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_{K_\alpha} &= R(Z - C_K)^2 \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right) = \\ &= 1,1 \cdot 10^5 \cdot (42 - 1)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 13868 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1},\end{aligned}$$

$$\tilde{\nu}_{K_\beta} = 1,1 \cdot 10^5 \cdot (42 - 1)^2 \left(1 - \frac{1}{9} \right) = 16436 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}.$$

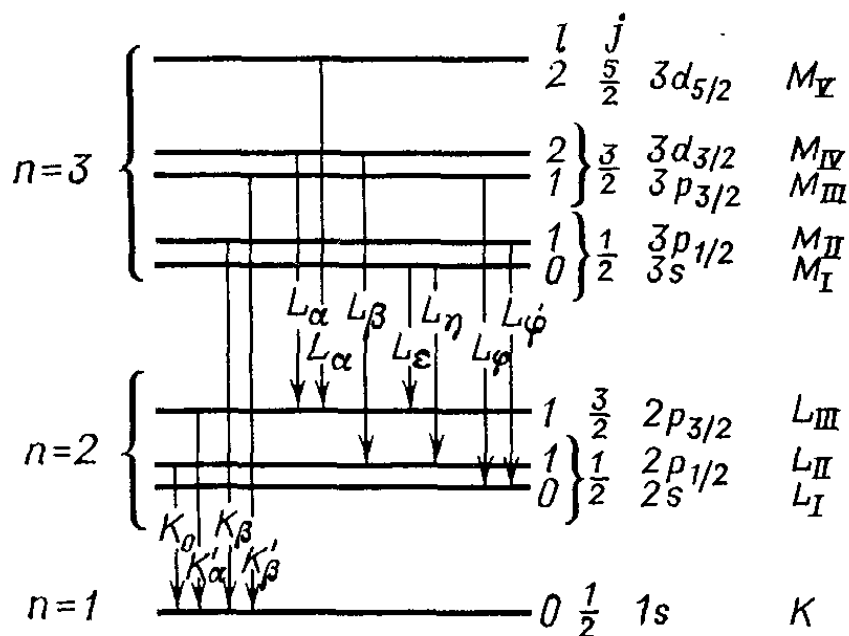
Аналогично находим

$$\tilde{\nu}_K - \tilde{\nu}_L = 14146 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1},$$

$$\tilde{\nu}_K - \tilde{\nu}_M = 15989 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}.$$

Таким образом, получаются близкие значения для $\tilde{\nu}_{K_\alpha}$ и $\tilde{\nu}_K - \tilde{\nu}_L$ и для $\tilde{\nu}_{K_\beta}$ и $\tilde{\nu}_K - \tilde{\nu}_M$.

3. Доказать правильность выражения, данного в условии задачи, чрезвычайно трудно. Ограничимся здесь утверждением,



Фиг. 75.1

что первый член в скобках связан с энергией (1), а второй является поправочным членом. Он вводится, когда одновременно учитываются и релятивистская форма уравнений движения, и спин-орбитальное взаимодействие. Различные значения квантового числа J , соответствующие заданному значению орбитального квантового числа L , обусловлены этим последним взаимодействием.

В данной задаче расчет энергии атома, потерявшего электрон, аналогичен расчету энергии атома, имеющего электрон с квантовыми числами n, l и $j = l \pm 1/2$. Тонкая структура возникает из-за дублетных уровней, для которых $l \neq 0$ (так как

при $l = 0$, $j = +1/2$ полный момент количества движения, зависящий от j , не может быть отрицательным).

Диаграмма уровней K , L и M представлена на фиг. 75.1.

Правила отбора $\Delta l = \pm 1$ и $\Delta j = 0, \pm 1$ разрешают только переходы, показанные вертикальными стрелками.

4. Для серии L , состоящей из трех линий, $n = 2$. Разность между уровнями учитывается в уравнении (1) посредством поправочных членов. Для этих членов находим

$$L_I(l=0, j=\frac{1}{2}, C'_x=2): \quad \frac{R\alpha^2(Z-2)^4}{2^4} \left(\frac{2}{1} - \frac{3}{4} \right) = \\ = 116,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1},$$

$$L_{II}(l=1, j=\frac{1}{2}, C'_x=3,5): \quad \frac{R\alpha^2(Z-3,5)^4}{2^4} \left(\frac{2}{1} - \frac{3}{4} \right) = \\ = 1,00 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1},$$

$$L_{III}(l=1, j=\frac{3}{2}, C'_x=3,5): \quad \frac{R\alpha^2(Z-3,5)^4}{2^4} \left(\frac{2}{2} - \frac{3}{4} \right) = \\ = 0,20 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}.$$

Эти величины добавляются к значению $\tilde{\nu}_L = 2156 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, полученному в II, 1.

При данных n и l причиной появления спинового дублета является разница в значениях j . При данных n и j изменение постоянной экранирования в зависимости от l приводит к появлению дублета экранирования. Для больших Z спиновое дублетное расщепление больше, чем расщепление дублета экранирования.

5. Линия $K_{\alpha 1}$ вызвана переходом $L_{III} \rightarrow K$, а $K_{\alpha 2}$ -линия — переходом $L_{II} \rightarrow K$. Эти линии образуют спиновой дублет. Имеем ($n = 2$, $j = 3/2$ или $1/2$)

$$\Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{K_{\alpha 1}} - \tilde{\nu}_{K_{\alpha 2}} = \frac{R\alpha^2(Z-C'_x)^4}{n^3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) = 0,80 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}.$$

III

Сохранение энергии при преобразовании кинетической энергии электрона, равной eV , в энергию одного кванта определяет граничную частоту

$$h\nu_l = eV,$$

$$\tilde{\nu}_l = \frac{eV}{hc} = \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8 \cdot 6,5 \cdot 10^{-34}} = 82 \cdot 10^9 \text{ см}^{-1},$$

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\nu}_l} = 1,22 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 0,122 \text{ Å}.$$

ЗАДАЧА 76

Эффект Мессбауэра

При радиоактивном превращении ядро $^{57}_{27}\text{Co}$ преобразуется в ядро $^{57}_{26}\text{Fe}$ в возбужденном состоянии со средним временем жизни $\tau = 1,45 \cdot 10^{-7}$ с и энергией на 14,4 кэВ выше основного состояния. Распад возбужденного состояния происходит с излучением γ -кванта.

1. Найдите ширину ΔW возбужденного состояния, а также относительную естественную ширину $\Delta\nu/\nu$ линий γ -лучей.

2. Предполагая, что излучающее ядро свободно и находится в состоянии покоя, вычислите относительное изменение $(\Delta\nu/\nu)_r$ при отдаче во время излучения с данной частотой.

3. Природное железо содержит 2% атомов $^{57}_{26}\text{Fe}$. Его ядра в принципе способны поглощать γ -излучение посредством механизма, аналогичного оптическому резонансу. Если ядро поглотителя, подобно ядру излучателя, свободно и находится в состоянии покоя, будет ли наблюдаться резонансное поглощение?

4. Чтобы продемонстрировать это поглощение, между источником $^{57}_{27}\text{Co}$ и γ -детектором помещают железный экран, который может передвигаться либо по направлению к источнику, либо от источника. Вычислите относительную скорость экрана и источника, которая соответствует естественной ширине линии; изменение частоты $\Delta\nu$, соответствующее относительной скорости 1 мм/с, и относительную скорость, которую нужно сообщить экрану, чтобы наблюдать резонанс.

5. Вычислите относительное уширение $(\Delta\nu/\nu)_T$ линии, обусловленное тепловым движением при $T = 300^\circ\text{C}$, пользуясь предположением о равномерном распределении тепловой энергии, а также и соответствующей относительной скорости.

6. В твердом кобальте (плотность $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³) упругие волны передают механическое движение со скоростью $v = 3$ км/с, и в частности движение, обусловленное отдачей ядра. Определите число атомов, участвующих в отдаче, и покажите, что относительным изменением частоты $(\Delta\nu/\nu)_r$ можно теперь пренебречь по сравнению с естественной шириной γ -линии.

7. На вершине 23-метровой башни помещен источник $^{57}_{27}\text{Co}$, который излучает γ -фотоны по направлению к основанию, где они принимаются. Вычислите изменение частоты $(\Delta\nu/\nu)_g$ как функцию H , s и ускорения силы тяжести $g = 9,81$ м/с². Можно ли его обнаружить?

РЕШЕНИЕ

1. Поскольку основное состояние бесконечно устойчиво, неопределенность энергии возникает только из-за ограниченности

времени жизни возбужденного состояния. Соотношение неопределенности, связывающее энергию со временем, дает

$$\Delta W \approx \frac{h}{\tau} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{1,45 \cdot 10^{-7}} = 4,56 \cdot 10^{-27} \text{ Дж} \quad (1)$$

или $2,85 \cdot 10^{-8}$ эВ. (Если принять $\Delta W \cdot \tau \approx \hbar$, $\Delta W = 4,5 \cdot 10^{-9}$ эВ.)

Относительная естественная ширина γ -линии

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{h \Delta \nu}{h \nu} = \frac{\Delta W}{W} = \frac{2,85 \cdot 10^{-8}}{14,4 \cdot 10^3} = 1,98 \cdot 10^{-12} \quad (2)$$

(при $\Delta W = 4,5 \cdot 10^{-9}$ эВ, $\Delta \nu/\nu = 3,14 \cdot 10^{-13}$).

2. Ядро с массой m получает момент отдачи p , равный импульсу $h\nu/c$ излучаемого фотона. Кинетическая энергия отдачи $p^2/2m$ вычитается из энергии перехода W , в результате уравнение баланса энергии имеет вид

$$W = h\nu + \frac{h^2 \nu^2}{2mc^2} = h\nu \left(1 + \frac{h\nu}{2mc^2} \right). \quad (3)$$

Изменение относительной частоты излучаемого кванта равно

$$\left(\frac{\Delta \nu}{\nu} \right)_r = \left(\frac{\Delta W}{W} \right)_r = - \frac{h\nu}{2mc^2}. \quad (4)$$

3. Предыдущая частота с измененным знаком получается при поглощении фотона, передающего свой импульс ядру, в результате чего энергия, необходимая для изменения внутреннего состояния при переходе из основного в возбужденное состояние, равна энергии фотона, уменьшенной на величину кинетической энергии, приобретенной ядром. Тогда относительный интервал между поглощаемой и излучаемой частотами равен

$$\frac{h\nu}{mc^2} = \frac{14,4 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{57 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 2,69 \cdot 10^{-7}. \quad (5)$$

Это более чем в 10^5 раз больше, чем относительная естественная ширина. В результате линии излучения и поглощения не перекрываются и резонансное поглощение не наблюдается.

4. Передвижение железного экрана приводит к изменению частоты поглощения вследствие эффекта Доплера. Изменение частоты, соответствующее скорости 1 мм/с, равно

$$\Delta \nu = \frac{u}{c} \nu = u \frac{h\nu}{hc} = u \frac{\Delta W}{hc} = 11,60 \text{ МГц}.$$

Чтобы компенсировать изменение частоты, обусловленное отдачей, которое определяется уравнением (5), экран должен приближаться к источнику со скоростью

$$u = 2c \left(\frac{\Delta \nu}{\nu} \right)_r = 3 \cdot 10^8 \cdot 2,69 \cdot 10^{-7} = 81 \text{ м/с}.$$

5. Уширение, обусловленное тепловым движением, равно

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_T = 2 \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{mc^2}} = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 4,14 \cdot 10^{-21} \cdot 2,3 \cdot 0,301}{57 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}} = 16,36 \cdot 10^{-7}.$$

Оно приблизительно в 10^6 раз больше естественной ширины и соответствует относительной скорости

$$u = c \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_T = 3 \cdot 10^8 \cdot 16,36 \cdot 10^{-7} = 491 \text{ м/с}.$$

6. При γ -излучении за время жизни τ движение в металле в результате отдачи происходит на расстоянии $u\tau$ и импульс передается объему

$$V = \frac{4}{3} \pi u^3 \tau^3.$$

Число атомов в кубическом метре равно

$$\frac{N_0}{A} = \frac{6 \cdot 10^{26} \cdot 7,8 \cdot 10^3}{57}.$$

Число атомов, которым передается импульс, равно

$$N = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot (3 \cdot 10^3 \cdot 1,45 \cdot 10^{-7})^3 \cdot 6 \cdot 7,8 \cdot 10^{29}}{3 \cdot 57} \approx 2,83 \cdot 10^{19}.$$

Импульс передается массе, в N раз большей массы излучающего ядра, и кинетическая энергия отдачи, которая входит в уравнение (3), в результате этого пренебрежимо мала по сравнению с энергией $h\nu$. Тогда можно наблюдать резонансное поглощение, причем мишень принимает в нем такое же участие, как и поглощающие ядра.

7. Одним из фундаментальных принципов общей теории относительности является эквивалентность между гравитационным полем и полем инерциальных сил, появляющихся при ускоренном движении. Гравитационные силы земли вызывают при своем действии равномерно ускоренное движение, и скорость, приобретаемая массой m в результате свободного падения с высоты H в этом поле, определяется теоремой о кинетической энергии

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgH,$$

откуда

$$v^2 = 2gH.$$

Для наблюдателя, находящегося на земле, промежуток времени Δt связан с промежутком времени $\Delta t'$ в системе, движущейся со скоростью v , соотношением

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{2gH}{c^2}} \approx \Delta t' \left(1 - \frac{gH}{c^2}\right).$$

Если интервал Δt представляет собой период часов (которыми может быть атомное ядро), то его относительное изменение при перемене системы отсчета имеет величину

$$\frac{T - T'}{T} = \frac{gH}{c^2}.$$

При этом также имеет место относительное изменение частоты $(\Delta\nu/\nu)_g$, которое называется «гравитационным эффектом Доплера». При заданных параметрах

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{12 \cdot 9,81}{9 \cdot 10^{16}} \approx 1,3 \cdot 10^{-15},$$

а это трудно обнаружить.

ЗАДАЧА 77

Колебательный и вращательный спектры молекулы иодистого водорода

Рассмотрите двухатомную молекулу HI при обычной температуре. Она совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр тяжести G .

I

1. Рассчитайте приведенную массу молекулы и ее момент инерции I относительно G . Межатомное расстояние примите равным $r = 1,6 \cdot 10^{-10}$ м, массу электрона $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг и относительные массы двух атомов $m_H = 1836m$ и $M_I = 127m_H$.

2. Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1)$$

Напишите независимое от времени уравнение Шредингера для стационарных вращательных состояний молекулы. Рассчитайте значение ее вращательной энергии W_J при условии, что уравнение имеет решение в виде $\psi = e^{iJ\varphi} (\sin \theta)^J$.

II

1. Какова структура вращательного спектра газообразного HI?

Какова частота света, излучаемого или поглощаемого при переходе между состоянием W_J и соседним с ним состоянием

W_{J+1} ? Найдите W_0 , W_1 , W_2 , W_3 и длины волн, излучаемые при переходах $0 \rightleftharpoons 1$, $1 \rightleftharpoons 2$, $2 \rightleftharpoons 3$. К какой области частот они относятся? $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

2. Предположите теперь, что колебательное движение молекулы не зависит от ее вращательного движения. Если два атома удалены друг от друга на расстояние r , отличное от r_0 , на них действует возвращающая сила $F = -k_0 s$, где $s = |r - r_0|$. При замене переменной $q = s \sqrt{b}$ уравнение Шредингера для этого движения принимает вид

$$\frac{d^2 \psi}{dq^2} + \left(\frac{a}{b} - q^2 \right) \psi = 0, \quad (2)$$

где

$$a = \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} W_v \quad \text{и} \quad b = \frac{4\pi^2 \mu v_0}{h}.$$

В этих выражениях W_v представляет колебательную энергию молекулы, а

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_0}{\mu}} \quad (3)$$

ее колебательную частоту.

а) При условии, что (2) имеет приемлемые решения только в случае $a/b = 2v + 1$ (где v — положительное целое число), напишите уравнение для колебательных уровней энергии молекулы. Каково асимптотическое решение уравнения (2)? К каким принципам квантовой механики можно обратиться для подтверждения того факта, что минимальная колебательная энергия не равна нулю?

б) Вспомните, что дипольный момент, связанный со всеми переходами $n \rightleftharpoons m$, приводящими к излучению, имеет величину

$$(D_q)_{nm} = e \int_{-\infty}^{+\infty} q \psi_n^* \psi_m dq.$$

Вычислите $(D_q)_{01}$ и $(D_q)_{02}$, зная (с точностью до нормирующей постоянной), что

$$\psi_0 = e^{-q^2/2}, \quad \psi_1 = q e^{-q^2/2}, \quad \psi_2 = (2q^2 - 1) \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right).$$

Покажите, что таким образом можно проверить правило отбора $\Delta v = \pm 1$ для переходов между стационарными колебательными состояниями.

3. Предположите, что полная энергия молекулы W_T является суммой ее вращательной и колебательной энергий. Определите значение W_T . Чему равны волновые числа $\tilde{\nu}$ излучения, испускаемого и поглощаемого молекулой, в предположении, что возбуждаются только один колебательный и большое число

вращательных уровней? Эта группа волновых чисел может быть представлена в виде $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 \pm m\Delta\tilde{\nu}$. Найдите численное значение $\Delta\tilde{\nu}$. Найдите $\tilde{\nu}_0$, ν_0 и k_0 [определяемые в (3)] при условии, что $\tilde{\nu} = 2332 \text{ см}^{-1}$ для $m = 7$.

РЕШЕНИЕ

I

1. Приведенная масса молекулы HI равна

$$\mu = \frac{m_{\text{H}}m_{\text{I}}}{m_{\text{H}} + m_{\text{I}}} = \frac{127}{128} m_{\text{H}} = \frac{127}{128} \cdot 1836 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Момент инерции

$$I = \mu r_0^2 = 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 2,56 \cdot 10^{-20} = 4,25 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

2. Уравнение Шредингера для стационарных состояний движения массы μ имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} (W - W_p) \psi = 0.$$

В данном случае, когда $W_p = 0$, Δ имеет заданную форму, а r_0 — величина, постоянная во время вращения, имеем

$$\frac{1}{r_0^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} W \psi = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2IW}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (4)$$

Подстановкой предполагаемого решения в это последнее уравнение получим

$$J(J-1) \cos^2 \theta (\sin \theta)^{J-2} - J(\sin \theta)^J + J \cos^2 \theta (\sin \theta)^{J-2} - \\ - J^2 (\sin \theta)^{J-2} + \frac{2IW}{\hbar^2} (\sin \theta)^J = 0,$$

так что

$$W_J = J(J+1) \frac{\hbar^2}{2I}. \quad (5)$$

Заметьте, что предполагаемое решение

$$\psi = \exp(jJ\varphi) \cdot (\sin \theta)^J$$

является частным случаем общего решения уравнения (1):

$$\psi = C \exp(jm\varphi) P_J^m(\cos \theta),$$

когда $J = m$. В этом можно убедиться, воспользовавшись определением присоединенных полиномов Лежандра P_J^m .

II

1. Иодистый водород, как и все полярные двухатомные молекулы, имеет вращательный спектр дипольного излучения и поглощения. Правило отбора для разрешенных переходов: $\Delta J = \pm 1$. Используя (5), получаем для первых четырех энергетических уровней

$$W_0 = 0, \quad W_1 = \frac{\hbar^2}{I}, \quad W_2 = \frac{3\hbar^2}{I}, \quad W_3 = \frac{6\hbar^2}{I}.$$

При

$$\frac{\hbar^2}{I} = \frac{(6,62)^2 \cdot 10^{-68}}{4 \cdot 9,87 \cdot 4,25 \cdot 10^{-47}} = 25,2 \cdot 10^{-22} \text{ Дж}$$

имеем

$$W_0 = 0, \quad W_1 = 25 \cdot 10^{-22} \text{ Дж}, \quad W_2 = 75 \cdot 10^{-22} \text{ Дж}, \\ W_3 = 150 \cdot 10^{-22} \text{ Дж}.$$

Частота поглощения при переходе между каким-либо энергетическим уровнем и ближайшим более высоким уровнем может быть записана в виде

$$\nu = \frac{W_{J+1} - W_J}{h} = \frac{h}{4\pi^2 I} (J+1),$$

откуда

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{4\pi^2 c I}{h} \frac{1}{J+1} = \frac{0,75 \cdot 10^{-3}}{J+1} \text{ м},$$

$$\lambda_{01} = 0,75 \text{ мм}, \quad \lambda_{12} = 0,37 \text{ мм}, \quad \lambda_{23} = 0,25 \text{ мм}.$$

Эти линии расположены в микроволновой области спектра. Они широко изучаются со времени их открытия в 1945 г.

2. а) Уравнение (2) описывает колебания гармонического осциллятора. Находим

$$2v + 1 = \frac{a}{b} = \frac{2W_v}{h\nu_0},$$

так что

$$W_v = \left(v + \frac{1}{2}\right) h\nu_0.$$

Асимптотическое решение уравнения (2) для больших значений r (а следовательно, и q) находится при пренебрежении величиной a/b по сравнению с q^2 . Уравнение записывается в виде

$$\frac{d^2 f}{dq^2} - q^2 f = 0$$

и имеет решение

$$f = A \exp\left[-\left(\frac{q^2}{2}\right)\right].$$

Существование нулевой энергии $W_0 = \frac{1}{2}h\nu$ при $v = 0$ является следствием соотношения неопределенности (см. задачу 57).

б) Напишите выражение для дипольного перехода между двумя энергетическими уровнями и воспользуйтесь заданными значениями для волновых функций

$$(D_q)_{01} = e \int_{-\infty}^{+\infty} q \psi_0^* \psi_1 dq = e \int_{-\infty}^{\infty} q^2 \exp(-q^2) dq.$$

Интегрирование проводится по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^2 \exp(-q^2) dq = [-q^2 \exp(-q^2)]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-q^2) dq.$$

Выражение в скобках равно нулю, а последний интеграл равен $\sqrt{\pi}$. Таким образом,

$$(D_q)_{01} = \frac{e \sqrt{\pi}}{2}.$$

Тем самым при ненулевом дипольном моменте переход $0 \rightarrow 1$ является разрешенным.

$$\begin{aligned} (D_q)_{02} &= e \int_{-\infty}^{\infty} q (2q^2 - 1) \exp(-q^2) dq = \\ &= 2e \int_{-\infty}^{\infty} q^3 \exp(-q^2) dq - e \int_{-\infty}^{\infty} q \exp(-q^2) dq. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю; с учетом этого находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2q^3 \exp(-q^2) dq = [-q^2 \exp(-q^2)]_{-\infty}^{\infty} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} q \exp(-q^2) dq.$$

Согласно предыдущим вычислениям, эти интегралы равны нулю. Таким образом, $(D_q)_{02}$ равно нулю и переход $0 \rightarrow 2$ является запрещенным.

3. Имеем

$$W_T = W_J + W_v = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) + \left(v + \frac{1}{2}\right) h\nu_0.$$

Откуда, если рассматривать только колебательный переход $v=0 \rightarrow v=1$, волновые числа излучаемых и поглощаемых линий равны

$$\tilde{\nu} = \frac{\Delta W_v + \Delta W_J}{ch} = \frac{\nu_0}{c} + [J'(J'+1) - J(J+1)] \frac{\hbar^2}{2Ic}.$$

Если принять во внимание правило отбора $\Delta J = \pm 1$, находим для $J' = J+1$:

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu_0}{c} + (J+1) \frac{h}{4\pi^2 I c};$$

для $J' = J - 1$:

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu_0}{c} - J \frac{h}{4\pi^2 I c}.$$

Все разрешенные значения $\tilde{\nu}$ можно представить выражением $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 \pm m \frac{h}{4\pi^2 I c}$ (m — положительные целые числа). Таким образом, имеем

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{h}{4\pi^2 I c} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 9,87 \cdot 4,25 \cdot 10^{-47} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,31 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}.$$

В задаче дано $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 + 7 \Delta\tilde{\nu}$, так что

$$\tilde{\nu}_0 = 2332 - 7 \cdot 13,1 = 2230 \text{ см}^{-1},$$

$$\nu_0 = c\tilde{\nu}_0 = 6,69 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1},$$

$$k_0 = 4\pi^2 \mu \nu_0^2 = 2,93 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}.$$

ЗАДАЧА 78

Расчет скорости света

С помощью решетки проведены точные измерения длин волн линий колебательно-вращательной полосы окиси углерода $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$, расположенной в области 4,67 мкм; при этом для сосредоточенных вблизи центра полосы семи линий получены следующие значения волновых чисел в см^{-1} в вакууме: 2131,635; 2135,550; 2139,430; 2147,084; 2150,858 и 2154,599.

Эти значения (как и для других линий в этой полосе) точно описываются уравнением

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 \pm Bm - Cm^2, \quad (1)$$

где m — целые числа ($m = 1, 2, 3, \dots$), а B и C — постоянные.

Кроме того, известно, что миллиметровые электромагнитные волны, генерируемые клистроном, при прохождении через газ поглощаются на частоте $\nu = 114737 \cdot 10^6$ Гц, что соответствует первой линии в чисто вращательном спектре ($J = 0 \rightarrow 1$). По этим данным найдите скорость света в вакууме.

РЕШЕНИЕ

Если рассматривать двухатомную молекулу как осциллятор и предположить, что колебательная и вращательная энергии независимы, то волновые числа колебательно-вращательной полосы определяются уравнением

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu_v}{c} \pm m \frac{h}{4\pi^2 I c}, \quad (2)$$

где ν_v — колебательная частота, m — положительное целое число, а I — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс молекулы и перпендикулярной к линии, соединяющей ядра. Уравнение (1), заданное в условии, получается из (2) при $\tilde{\nu}_0 = \nu_v/c$ и $B = h/4\pi^2 I c$. Оно содержит также дополнительный член Cm^2 , обусловленный взаимодействием вращений и колебаний.

Заметьте, что первые три заданных значения отличаются по $\tilde{\nu}$ попарно на 4 см^{-1} , так же как и три последних значения, а разница между третьим и четвертым — 8 см^{-1} . Чисто вращательная линия $\tilde{\nu}_0$, которая отсутствует в спектре поглощения, располагается между третьей и четвертой линиями серии. С учетом этого можно отнести значения m к различным линиям. Находим

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_1 &= 2147,084 = \tilde{\nu}_0 + B - C, \\ \tilde{\nu}_2 &= 2150,858 = \tilde{\nu}_0 + 2B - 4C, \\ \tilde{\nu}_3 &= 2154,599 = \tilde{\nu}_0 + 3B - 9C, \\ \tilde{\nu}_{-1} &= 2139,430 = \tilde{\nu}_0 - B - C, \\ \tilde{\nu}_{-2} &= 2135,550 = \tilde{\nu}_0 - 2B - 4C, \\ \tilde{\nu}_{-3} &= 2131,635 = \tilde{\nu}_0 - 3B - 9C.\end{aligned}\tag{3}$$

Первое и четвертое уравнения дают

$$\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_{-1} = 2\tilde{\nu}_0 - 2C.\tag{4}$$

Второе и пятое —

$$\tilde{\nu}_2 + \tilde{\nu}_{-2} = 2\tilde{\nu}_0 - 8C,$$

откуда

$$C = \frac{1}{6} (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_{-1}) - (\tilde{\nu}_2 + \tilde{\nu}_{-2}) = 0,0176.\tag{5}$$

Из (4) находим

$$\tilde{\nu}_0 = \frac{1}{2} (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_{-1}) + C = 2134,274.\tag{6}$$

Кроме того, первое уравнение в (3) дает

$$B = \tilde{\nu}_1 - \tilde{\nu}_0 + C = 3,8270.\tag{7}$$

Подставляя значения (5), (6) и (7) в (1), получаем следующие значения:

$$\tilde{\nu}_3 = 2154,597, \quad \tilde{\nu}_{-3} = 2131,635$$

в хорошем согласии с заданными значениями.

Кроме того, частота первой вращательной линии СО определяется формулой

$$\nu = \frac{W_1 - W_0}{h} = \frac{h}{4\pi^2 I} = cB,$$

откуда

$$c = \frac{v}{B} = \frac{11,4737 \cdot 10^{10}}{3,8270} = 2,99792 \cdot 10^{10} \text{ см/с.}$$

При более точных измерениях с учетом не рассматривавшихся здесь тонкостей этот метод может быть очень эффективным¹⁾.

ЗАДАЧА 79

Спектроскопия и удельная теплоемкость

Внутреннюю энергию одного моля идеального газа можно представить в виде суммы четырех компонент:

$$U = \mathfrak{N}(\bar{W}_t + \bar{W}_r + \bar{W}_v + \bar{W}_e),$$

где $\bar{W}_t$ — среднее значение поступательной энергии молекулы, $\bar{W}_r$ — средняя вращательная энергия, $\bar{W}_v$ — средняя колебательная энергия, $\bar{W}_e$ — средняя электронная энергия, $\mathfrak{N}$ — число Авогадро. Молярная теплоемкость при постоянном объеме может быть записана в виде $C = (\partial U / \partial T)_v$, где T — абсолютная температура. Пользуясь спектроскопическими данными, найдем $U(T)$ и $C(T)$ в области $0 \div 2500$ К.

Среднее значение энергии $\bar{W}_i$ можно найти из закона распределения Больцмана, пользуясь уравнением

$$\bar{W}_i = \frac{\sum_0^{\infty} g_i W_i \exp(-\beta W_i)}{\sum_0^{\infty} g_i \exp(-\beta W_i)}, \quad (1)$$

где $\beta = 1/kT$, k — постоянная Больцмана. Суммирование проводится по всем квантовым состояниям энергии; g_i — статистический вес (число различных квантовых состояний с одной и той же энергией). В случае когда число энергетических уровней в данном энергетическом интервале велико, суммирование в (1) можно заменить интегрированием.

I

Покажите, что при очень низкой температуре, например при 1 К, поступательная энергия молекулы W_t , находящейся в объеме порядка 1 см^3 , достигает значения $3/2 kT$, которое получается с помощью классического принципа равномерного распределения энергии по степеням свободы.

¹⁾ См. Плайлер и др., Journ. Opt. Soc. Amer. 45, 1955.

II

Рассмотрите двухатомную молекулу AB , состоящую из двух различных атомов A и B (в случае если A и B одинаковы, возникают усложнения, обусловленные симметрией). Выведите выражение для среднего значения $\bar{W}_r$ вращательной энергии. Введите в качестве переменной безразмерное отношение $x = T_r/T$, где $T_r = \hbar^2/2kI$ (I — момент инерции молекулы относительно оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно к AB) есть характеристическая вращательная температура, и рассмотрите ход функции $\bar{W}_r(T)$. Исследуйте два предельных случая: первый для $T \ll T_r$, когда возбуждено малое число вращательных уровней и целесообразно рассматривать только два первых уровня; второй — для $T \gg T_r$, когда возбуждено множество уровней. Вычислите относительное число молекул на первых восьми уровнях, когда $T = 10 T_r$. Напишите выражение для вращательной теплоемкости и определите ее поведение с изменением температуры.

Численный пример: Вычислите T_r для молекул HD , $H^{35}Cl$ и $^{14}N^{16}O$, для которых значения $AB = r$ равны соответственно 0,75, 1,27, 1,15 Å.

III

Уподобив двухатомную молекулу линейному гармоническому осциллятору, выведите выражение для средней колебательной энергии $\bar{W}_v$. Вводя переменную $y = T_v/T$, где $T_v = \hbar\nu/k$ — характеристическая колебательная температура, рассмотрите поведение функции $\bar{W}_v(T)$ и соответствующей молекулярной теплоемкости.

Численный пример: Вычислите T_v для HD , HCl и NO при условии, что волновые числа их колебательных линий в спектре комбинационного рассеяния света равны соответственно 3630, 2886 и 1880 см^{-1} .

IV

При условии, что первые уровни электронного возбуждения HD , HCl и NO соответствуют 90 400 см^{-1} , 75 000 см^{-1} и 45 000 см^{-1} , покажите, что при расчете молекулярной теплоемкости вплоть до 2500 К нет необходимости учитывать $\bar{W}_e$.

РЕШЕНИЕ

I

Рассмотрение поступательного движения частицы, заключенной в данном объеме, показывает, что самый нижний энергетический уровень соответствует длине волны де Бройля порядка

линейных размеров объема. Квантовая энергия поступательного движения равна

$$W = \frac{h^2}{8mL} = \frac{44 \cdot 10^{-68}}{8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} \cdot M \cdot 10^{-2}} \approx \frac{4}{M} \cdot 10^{-39} \text{ Дж},$$

где M — массовое число молекулы. Эта энергия много меньше, чем $kT = 1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж для $T = 1$ К. При такой температуре возбуждено очень большое число уровней, и для одной из трех поступательных степеней свободы, например x , для которой энергия равна $1/2 m v_x^2$, можно написать

$$W = \frac{\int_0^\infty (1/2) m v_x^2 \exp[-\beta (m v_x^2 / 2)] dv_x}{\int_0^\infty \exp[-\beta (m v_x^2 / 2)] dv_x}.$$

Принимая $q^2 = \beta m v_x^2 / 2$, получаем:

$$W = \frac{1}{\beta} \frac{\int_0^\infty q^2 \exp(-q^2) dq}{\int_0^\infty \exp(-q^2) dq} = \frac{1}{\beta} \frac{(1/2) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\beta} = \frac{kT}{2}.$$

Полная кинетическая энергия поступательного движения

$$\frac{m v_x^2}{2} = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

равна величине $\bar{W}_t = 3/2 kT$, и молярная удельная теплоемкость имеет постоянное значение

$$C_t = \mathfrak{N} \frac{3}{2} k = \frac{3}{2} R.$$

II

Вращательная энергия свободного ротатора, который представляет собой двухатомная молекула, может принимать значения

$$W_J = J(J+1) \frac{\hbar^2}{2I} \quad (J - \text{положительные целые числа или нуль}).$$

Статистический вес одного из этих состояний равен $2J+1$, поскольку угловой момент $G = \sqrt{J(J+1)} \cdot \hbar$ может принимать $m = 2J+1$ различных положений относительно фиксированной

оси. Этим значениям соответствует одна и та же энергия в отсутствие действующего на молекулу внешнего поля. Однако при наличии такого поля эти состояния могут расщепляться. Правило отбора для вращательного квантового числа: $\Delta J = \pm 1$.

Таким образом, выражение для средней вращательной энергии имеет вид

$$\bar{W}_r = \frac{\sum_0^{\infty} J(J+1)(2J+1)(\hbar^2/2I) \exp[-\beta J(J+1)\hbar^2/2I]}{\sum_0^{\infty} (2J+1) \exp[-\beta J(J+1)\hbar^2/2I]}$$

или, принимая $x = T_r/T$ и $T_t = \hbar^2/2Ik$,

$$\bar{W}_r = kT_r \frac{\sum_0^{\infty} J(J+1)(2J+1) \exp[-J(J+1)x]}{\sum_0^{\infty} (2J+1) \exp[-J(J+1)x]}. \quad (2)$$

Вращательная молярная теплоемкость равна

$$C_r = \Re \frac{d\bar{W}_r}{dT} = R \frac{T_r^2}{T^2} \left\{ \frac{\sum_0^{\infty} J^2(J+1)^2(2J+1) \exp[-J(J+1)x]}{\sum_0^{\infty} (2J+1) \exp[-J(J+1)x]} - \left[\frac{\sum_0^{\infty} J(J+1)(2J+1) \exp[-J(J+1)x]}{\sum_0^{\infty} (2J+1) \exp[-J(J+1)x]} \right]^2 \right\}. \quad (3)$$

Для $T \ll T_r$ при рассмотрении только уровней $J=0$ и $J=1$ имеем

$$\bar{W}_r = 6kT_r \exp\left(-2\frac{T_r}{T}\right),$$

$$C_r = 12R \frac{T_r}{T} \exp\left(-2\frac{T_r}{T}\right).$$

Это выражение стремится к нулю с уменьшением T .

Для $T \gg T_r$ выражение (2) принимает вид

$$\bar{W}_r = kT_r \frac{\int_0^{\infty} 2J^3 \exp(-J^2x) dx}{\int_0^{\infty} 2J \exp(-J^2x) dx},$$

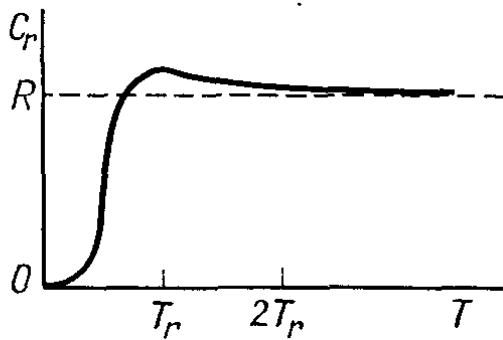
так что, обозначив $J^2 x = q$, получим

$$\bar{W}_r = kT \frac{\int_0^\infty q \exp(-q) dq}{\int_0^\infty \exp(-q) dq} = kT$$

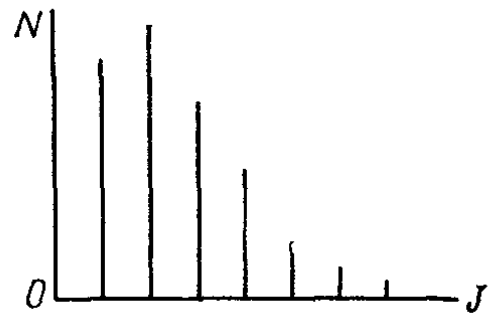
и

$$C_r = R.$$

Вновь получаются значения, соответствующие равномерному распределению энергии, так как линейный ротатор, обладающий лишь кинетической энергией, имеет только две вращательные степени свободы относительно осей, перпендикулярных к линии



Фиг. 79.1



Фиг. 79.2

АВ. Действительно, момент инерции относительно оси АВ, хотя и не равен нулю, но очень мал, в результате чего величина соответствующего кванта вращения, обратно пропорциональная этому моменту инерции, так велика, что молекула не обладает вращательной энергией относительно этой оси, за исключением случаев очень высоких температур.

Кривая, соответствующая (3), не проста. Начинаясь с нуля, она проходит значение R при температуре, равной приблизительно $0,6T_r$; достигает максимального значения порядка $1,1R$ при T , близком к $0,8T_r$; затем асимптотически стремится к значению R , к которому приближается очень близко при $T = 2T_r$ (фиг. 79.1).

Относительное число молекул в данном состоянии J равно

$$J = \frac{(2J+1) \exp[-J(J+1)x]}{\sum_0^\infty (2J+1) \exp[-J(J+1)x]} \quad (4)$$

При $x = 0,1$ числитель N в (4) при изменении J от 0 до 7 имеет следующие значения:

$J = 0$	$N = 1$
1	$3 \exp(-0,2) = 2,457$
2	$5 \exp(-0,6) = 2,75$
3	$7 \exp(-1,2) = 2,10$
4	$9 \exp(-2,0) = 1,22$
5	$11 \exp(-3,0) = 0,55$
6	$13 \exp(-4,2) = 0,19$
7	$15 \exp(-5,6) = 0,05$

Такое распределение объясняет относительную интенсивность чисто вращательных спектральных линий для колебательно-вращательных спектров (фиг. 79.2).

Численный пример:

$$T_r = \frac{h^2}{8\pi^2 k I} = \frac{3,96 \cdot 10^{-46}}{I}, \quad I = \mu r^2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

μ — приведенная масса.

Для HD:

$$\mu = \frac{2}{3} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \quad I = \frac{2}{3} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (0,75)^2 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^2,$$

$$T_r = 64 \text{ К.}$$

Для HCl:

$$\mu = \frac{35}{36} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \quad I = \frac{35}{36} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (1,27)^2 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^2,$$

$$T_r = 15 \text{ К.}$$

Для NO:

$$\mu = \frac{224}{30} \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \quad I = \frac{224}{30} \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} \cdot (1,15)^2 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м}^2,$$

$$T_r = 2,4 \text{ К.}$$

III

Квантованная энергия гармонического осциллятора равна

$$W_v = \left(v + \frac{1}{2}\right) h\nu,$$

где ν — частота осциллятора, а v — положительное целое число

или нуль. Среднее значение колебательной энергии равно

$$\begin{aligned}\bar{W}_v &= \frac{\sum_0^{\infty} [v + (1/2)] h\nu \exp \{-\beta [v + (1/2)] h\nu\}}{\sum_0^{\infty} \exp \{-\beta [v + (1/2)] h\nu\}} = \\ &= \frac{(h\nu/2) \sum_0^{\infty} \exp(-\beta v h\nu) + \sum_0^{\infty} v h\nu \exp(-\beta v h\nu)}{\sum_0^{\infty} \exp(-\beta v h\nu)} . \\ \bar{W}_v - \frac{h\nu}{2} &= \frac{\sum_0^{\infty} v h\nu \exp(-\beta v h\nu)}{\sum_0^{\infty} \exp(-\beta v h\nu)} .\end{aligned}\quad (5)$$

Заметьте, что числитель (5) с точностью до знака равен производной от его знаменателя D по β , и, таким образом, можно написать

$$\bar{W}_v - \frac{h\nu}{2} = -\frac{1}{D} \frac{dD}{d\beta} = -\frac{d(\lg D)}{d\beta} = -\frac{d}{d\beta} \lg \sum_0^{\infty} \exp(-\beta v h\nu).$$

D — сумма геометрической прогрессии, и ее значение

$$D = \frac{1}{1 - \exp(-\beta h\nu)},$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\bar{W}_v - \frac{h\nu}{2} &= -\frac{d}{d\beta} \left(\lg \frac{1}{1 - \exp(-\beta h\nu)} \right) = \\ &= \frac{h\nu}{\exp(\beta h\nu) - 1} = \frac{kT_v}{\exp(T_v/T) - 1} .\end{aligned}\quad (6)$$

При $T \ll T_v$ единиц в знаменателе можно пренебречь по сравнению с экспонентой. Тогда получаем

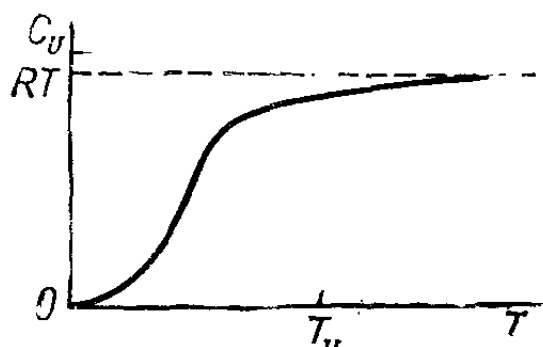
$$\bar{W}_v - \frac{h\nu}{2} \approx kT_v \exp\left(-\frac{T_v}{T}\right).$$

При $T \gg T_v$ экспоненту можно разложить в ряд и получить выражение

$$\bar{W}_v - \frac{h\nu}{2} = \frac{h\nu}{\beta h\nu [1 + (\beta/2) h\nu + \dots]}, \quad (7)$$

которое стремится к $1/\beta = kT$ при высоких температурах. Это последнее значение соответствует равномерному распределению

энергии, так как линейный осциллятор имеет только одну степень свободы и в то же время его потенциальная и кинетическая энергии являются квадратичными функциями координат и скоростей соответственно.



Фиг. 79.3

Из (6) находим уравнение для молярной колебательной теплоемкости:

$$C_v = \Re \frac{d\bar{W}_v}{dT} = R \frac{T_v^2}{T^2} \cdot \frac{\exp(T_v/T)}{[\exp(T_v/T) - 1]^2}. \quad (8)$$

Это выражение стремится к нулю при уменьшении T и к R — при высоких температурах. На фиг. 79.3 показан график этой функции.

Численный пример:

$$T_v = \frac{h\nu}{k} = \frac{hc}{k} \tilde{\nu} = 1,44 \cdot 10^{-2} \tilde{\nu}.$$

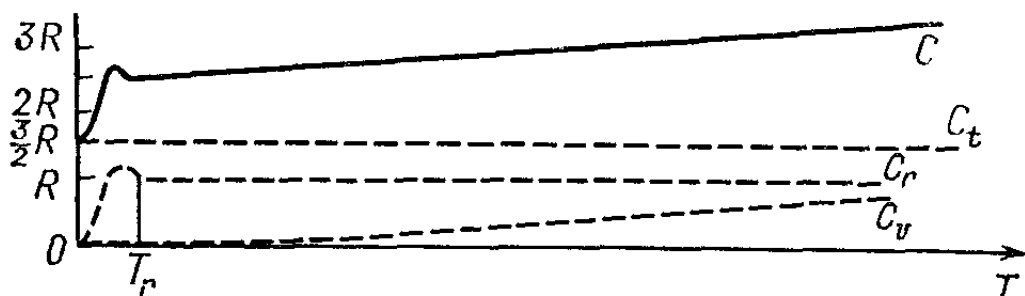
Для HD: $T_v = 1,44 \cdot 10^{-2} \cdot 3630 \cdot 10^2 = 5227 \text{ К.}$

Для HCl: $T_v = 1,44 \cdot 10^{-2} \cdot 2886 \cdot 10^2 = 4266 \text{ К.}$

Для NO: $T_v = 1,44 \cdot 10^{-2} \cdot 1880 \cdot 10^2 = 2607 \text{ К.}$

IV

Рассмотрите отношение N_2/N_1 числа молекул, находящихся на первом возбужденном уровне, к числу молекул в основном



Фиг. 79.4

состоянии, используя распределение Больцмана и считая статистические веса уровней равными единице (поскольку это может

привести только к изменениям порядка единицы).

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{W_1 - W_2}{kT}\right).$$

Имеем $kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 25 \cdot 10^2 = 3,45 \cdot 10^{-20}$ Дж,

$$W_2 - W_1 = hc\tilde{\nu} = 19,96 \cdot 10^{-26} \tilde{\nu}.$$

Для HD: $W_2 - W_1 = 182 \cdot 10^{-20}$, $\frac{N_2}{N_1} = \exp(-52) = 0,26 \cdot 10^{-22}$.

Для HCl: $W_2 - W_1 = 150 \cdot 10^{-20}$, $\frac{N_2}{N_1} = \exp(-43) = 0,21 \cdot 10^{-18}$.

Для NO: $W_2 - W_1 = 90 \cdot 10^{-20}$, $\frac{N_2}{N_1} = \exp(-26) = 0,51 \cdot 10^{-11}$.

Таким образом, число возбужденных молекул очень мало, и электронная энергия не вносит вклада в удельную теплоемкость рассматриваемых молекул.

Общий ход кривой $C(T)$ показан на фиг. 79.4 сплошной линией, а температурная зависимость поступательной, вращательной и колебательной теплоемкостей — штриховыми кривыми. При обычных температурах колебательная теплоемкость не достигает предельного значения, за исключением случая более тяжелых молекул, чем рассмотренные в этой задаче.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Преобразование Фурье (Ф. Т.) — это математическая операция, часто применяемая в оптике. Интеграл Фурье встречается во множестве различных задач (пространственная когерентность, временная когерентность, дифракция, структурный фактор рентгеновских лучей, соотношение неопределенности и т. д.).

Это рассмотрение не будет строгим. Оно приводится просто как некоторый инструмент для оптиков, помогающий им упростить расчеты.

А. Определения и основные свойства преобразования Фурье

1. Система обозначений и определения

Пусть x — действительная переменная, изменяющаяся в области между $-\infty$ и $+\infty$, а $f(x)$ — функция x , принимающая действительные или комплексные значения. $f(x)$ должна быть суммируемой функцией, т. е. никогда не должна стремиться к бесконечности при $x \rightarrow \infty$. В оптике это требование соблюдается всегда.

По определению:

$$\text{Ф. Т. } [f(x)] = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi j u x} dx. \quad (1)$$

Ф. Т. записывается в виде

$$f(x) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F(u), \quad (2)$$

Говорят, что $F(u)$ есть преобразование Фурье (Ф. Т.) функции $f(x)$ [или — спектр $f(x)$]. u и x называют сопряженными переменными.

Рассмотрим, например, уравнения распространения электромагнитных волн: $E = E_m \exp[2\pi j(\nu t - \sigma x)]$,

$$\left. \begin{matrix} \nu \text{ и } t \\ \sigma \text{ и } x \end{matrix} \right\} \text{сопряженные переменные;} \quad (3)$$

волны, связанной с частицей:

$$\psi = \psi_m \exp \left[\frac{2\pi j}{h} (Wt - px) \right],$$

$$\left. \begin{matrix} W \text{ и } t \\ p \text{ и } x \end{matrix} \right\} \text{ сопряженные переменные.} \quad (4)$$

II. Свойство обратимости Ф. Т.

Если $F(u)$ — известная функция, то $f(x)$ можно получить с помощью следующей операции:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-2\pi j u x} du. \quad (5)$$

[Обратите внимание на изменение знака экспоненты в уравнении (5) по сравнению с уравнением (1).]

Уравнение (5), выраженное через размерности, имеет вид

$$[f] = [F][u];$$

в то время как для уравнения (1) имеем

$$[F] = [f][x];$$

откуда

$$[u][x] = 1. \quad (6)$$

Это последнее соотношение легко приводит к соотношению неопределенности Гейзенберга.

Замечание. Некоторые авторы записывают эти уравнения в виде

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{j u x} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-j u x} du.$$

III. Свойства

1. Линейность

Если допустить, что две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют Ф. Т. $F_1(u)$ и $F_2(u)$ соответственно, и если a_1 и a_2 постоянные, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] e^{2\pi j u x} dx = \\ = a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) e^{2\pi j u x} dx + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) e^{2\pi j u x} dx \end{aligned} \quad (7)$$

или

$$[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} [a_1 F_1(u) + a_2 F_2(u)]. \quad (8)$$

Преобразование Фурье линейной комбинации функций есть линейная комбинация преобразований Фурье этих функций.

2. Сдвиг

Сдвиг функции $f(x)$ на постоянную величину x' :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x') e^{2\pi j u x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) e^{2\pi j u (X + x')} dX. \quad (9)$$

Принимая $X = x - x'$, (9) можно записать в виде

$$e^{2\pi j u x'} \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) e^{2\pi j u X} dX = e^{2\pi j u x'} F(u), \quad (10)$$

$$f(x - x') \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F(u) e^{2\pi j u x'}. \quad (11)$$

Если функция $f(x)$ сдвигается на постоянную величину x' , ее Ф. Т. умножается на $e^{2\pi j u x'}$.

3. Свойство симметрии

Проводя преобразование Фурье для $f(x) e^{-2\pi j u' x}$ при постоянной u' , имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi j u' x} e^{2\pi j u x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi j (u - u') x} dx = F(u - u'), \quad (12)$$

$$e^{-2\pi j u' x} f(x) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F(u - u'). \quad (13)$$

Обратите внимание на аналогию между уравнениями (11) и (13). Эти результаты можно применить к различным примерам.

$$f(x + x') + f(x - x') \quad F(u) e^{-2\pi j u x'} + F(u) e^{2\pi j u x'} = \\ = 2F(u) \cos 2\pi u x', \quad (14)$$

$$f(x - x') - f(x + x') \quad F(u) e^{2\pi j u x'} - F(u) e^{-2\pi j u x'} = \\ = 2jF(u) \sin 2\pi u x', \quad (15)$$

$$2f(x) - f(x - x') - f(x + x') \quad 2F(u) [1 - \cos 2\pi u x'] = \\ = 4F(u) \sin^2 \pi u x', \quad (16)$$

$$f(x) \cos 2\pi u' x = \\ = \frac{1}{2} f(x) [e^{2\pi j u' x} + e^{-2\pi j u' x}] \quad \frac{1}{2} [F(u + u') + F(u - u')], \quad (17)$$

$$f(x) \sin 2\pi u'x =$$

$$= \frac{1}{2j} f(x) [e^{2\pi j u'x} - e^{-2\pi j u'x}] = \frac{1}{2j} [F(u + u') - F(u - u')], \quad (18)$$

$$f(x) \sin^2 \pi u'x =$$

$$= \frac{1}{2} f(x) [1 - \cos 2\pi u'x] = \frac{1}{4} [2F(u) - F(u + u') - F(u - u')]. \quad (19)$$

4. Изменение масштаба

Пусть a — действительная постоянная. Требуется произвести преобразование Фурье функции $f(ax)$. Сделайте замену переменной $y = ax$.

Если $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{2\pi j u x} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{2\pi j u y/a} dy = \frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right), \quad (20)$$

если $a < 0$:

$$\frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(y) e^{2\pi j u y/a} dy = -\frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right). \quad (21)$$

В общем случае можно записать

$$f(ax) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right). \quad (22)$$

В частном случае, при $a = -1$, уравнение (22) записывается в виде

$$f(-x) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F(-u).$$

5. Виды симметрии

Проводя Ф.Т. функции $f_{(x)}^*$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) e^{2\pi j u x} dx = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi j u x} dx \right]^* = F^*(-u), \quad (23)$$

$$f^*(x) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F^*(-u). \quad (24)$$

Нередко приходится исследовать функции с особым видом симметрии. Предположим, что $f(x)$ состоит из четных функций $p(x)$ и нечетных функций $i(x)$.

Можно записать

$$f(x) = p(x) + i(x), \quad (25)$$

где $p(x)$ и $i(x)$ могут быть комплексными.

Преобразование Фурье функции $f(x)$ сводится к

$$F(u) = 2 \int_0^{+\infty} p(x) \cos 2\pi u x dx + 2j \int_0^{+\infty} i(x) \sin 2\pi u x dx. \quad (26)$$

Найдены следующие общие результаты:

$$f(x) \text{ действительная, четная} \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F(u) \text{ действительная, четная}; \quad (27)$$

$$f(x) \text{ действительная, нечетная} \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F(u) \text{ мнимая, нечетная}; \quad (28)$$

$$f(x) \text{ мнимая, четная} \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F(u) \text{ мнимая, четная}. \quad (29)$$

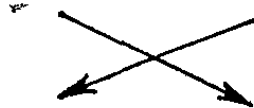
Следующая таблица суммирует эти результаты (Re обозначает действительную часть, а Im — мнимую).

$$f(x) = p(x) + i(x) = \text{Re}[p(x)] + j \text{Im}[p(x)] + \text{Re}[i(x)] + j \text{Im}[i(x)], \quad (30)$$

↓ ↓ ↓

↓

↓



$$F(u) = P(u) + I(u) = \text{Re}[P(u)] + j \text{Im}[P(u)] + \text{Re}[I(u)] + j \text{Im}[I(u)]. \quad (31)$$

Стрелки указывают на соответствие между преобразованиями Фурье.

IV. Распространение на функцию с двумя переменными

Принимая, что $F(u, v)$ есть Ф. Т. для функции $f(x, y)$, определяем:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{2\pi j(ux+vy)} dx dy \quad (32)$$

и обратно:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{-2\pi j(ux+vy)} du dv. \quad (33)$$

Функции f и F взаимно симметричны, причем одна является спектром другой.

Эти соотношения появляются, например, в принципе Гюйгенса, где по известному распределению амплитуд на волновой поверхности можно с помощью Ф. Т. рассчитать спектр $F(u, v)$ функции $f(x, y)$ и тем самым получить дифракционную картину. Наоборот, если известна амплитуда дифрагированной волны $F(u, v)$, можно рассчитать структуру волновой поверхности, которая вызывает дифракцию.

V. Различные применения преобразования Фурье

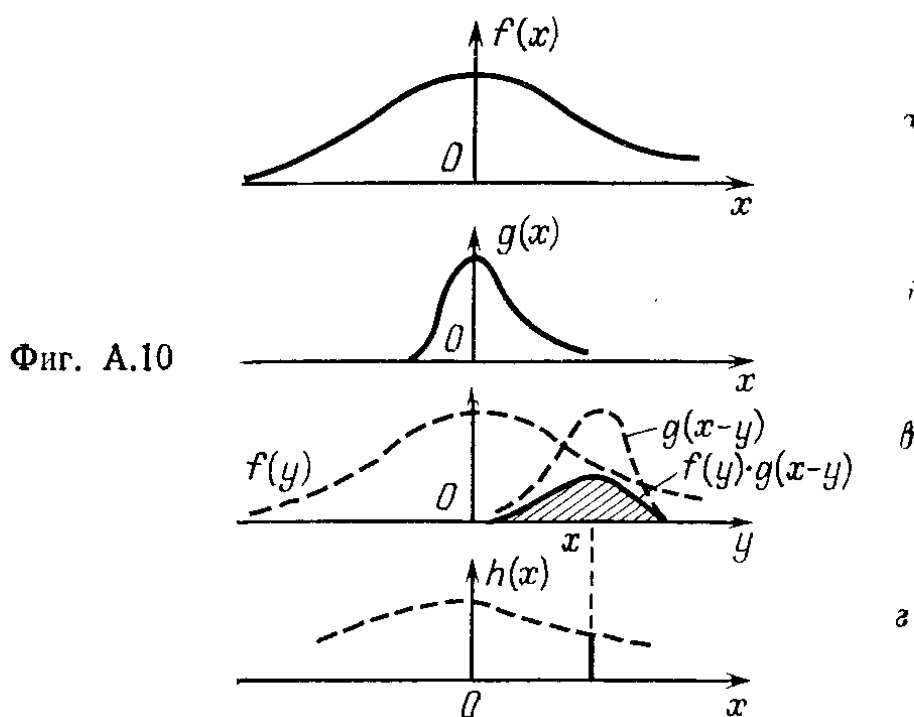
В конце данного приложения в таблице приводятся некоторые примеры преобразований Фурье, с которым читатель может встретиться (см. примеры 1—9).

В графическом представлении эти функции нормированы.

Б. Свертка

1. Определение

Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и суммируемы (фиг. А.10, а и А.10, б).



Сверткой этих двух функций называется функция $h(x)$:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy. \quad (34)$$

Эту запись часто делают с помощью следующего обозначения

$$h(x) = f(x) \otimes g(x). \quad (35)$$

Рисунки А.10, в и А.10, г иллюстрируют те операции, которые приводят к свертке: функция $g(-y)$ переносится на значение x . Затем получается произведение $f(y)g(x-y)$. Тогда ордината $h(x)$ на фиг. А.10, г будет равна заштрихованной площади на фиг. А.10, в.

II. Свойства

А. Коммутативность свертки

Произведем замену в уравнении (34): $x - y = Y$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - Y) g(Y) d(-Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(x - Y) g(Y) dY$$

$$h(x) = g \otimes f. \quad (36)$$

Б. Преобразование Фурье для свертки

$$f(x) \xrightarrow{\text{F. T.}} F(u)$$

$$g(x) \xrightarrow{\text{F. T.}} G(u). \quad (37)$$

Уравнение (34) можно записать в виде

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{-2\pi i u (x-y)} du dy. \quad (38)$$

Таким образом, сохраняя порядок интегрирования, имеем:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{-2\pi i u x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{2\pi i u y} dy du$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) G(u) e^{-2\pi i u x} du. \quad (39)$$

В результате можно сформулировать следующую обратную теорему:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \otimes g \xrightarrow{\text{F. T.}} F \cdot G, \\ f \cdot g \xrightarrow{\text{F. T.}} F \otimes H. \end{array}} \quad (40)$$

Эта теорема известна как теорема Парсеваля.

III. Частные случаи

а) Если в уравнении (34) $x = 0$, получаем

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot G(u) du. \quad (41)$$

При $f = g$ находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(u) du. \quad (42)$$

б) Корреляция

Пусть

$$h'(x) = f(x) \otimes g^*(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g^*(y-x) dy. \quad (43)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F(u), \\ g^*(-x) &\xrightarrow{\text{Ф. Т.}} G^*(u). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Уравнение (43) принимает вид

$$h'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot G^*(u) e^{-2\pi jux} du. \quad (45)$$

В частном случае, когда $x = 0$,

$$h'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) G^*(u) du. \quad (46)$$

в) Автокорреляция

$$f(x) = g(x). \quad (47)$$

$$h'(x) = f(x) \otimes f^*(-x). \quad (48)$$

Уравнение (48) принимает вид

$$h'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2 e^{-2\pi jux} du. \quad (49)$$

Свертка $f(x) \otimes f^*(-x)$ называется автокорреляционной функцией $f(x)$, а ее Ф. Т. есть $|F(u)|^2$.

При $x = 0$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2 du.} \quad (50)$$

Эта теорема выражает закон сохранения энергии, независимо от того, в каком плане она применяется (теорема Рэлея).

Приложения автокорреляции

В качестве типичного примера найдите автокорреляцию функции щели, а затем Ф. Т. этой автокорреляционной функции. $f(x)$ — действительная четная функция. Имеем

$$f \otimes f \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} F^2(u). \quad (51)$$

Различные функции показаны на фиг. А.11.

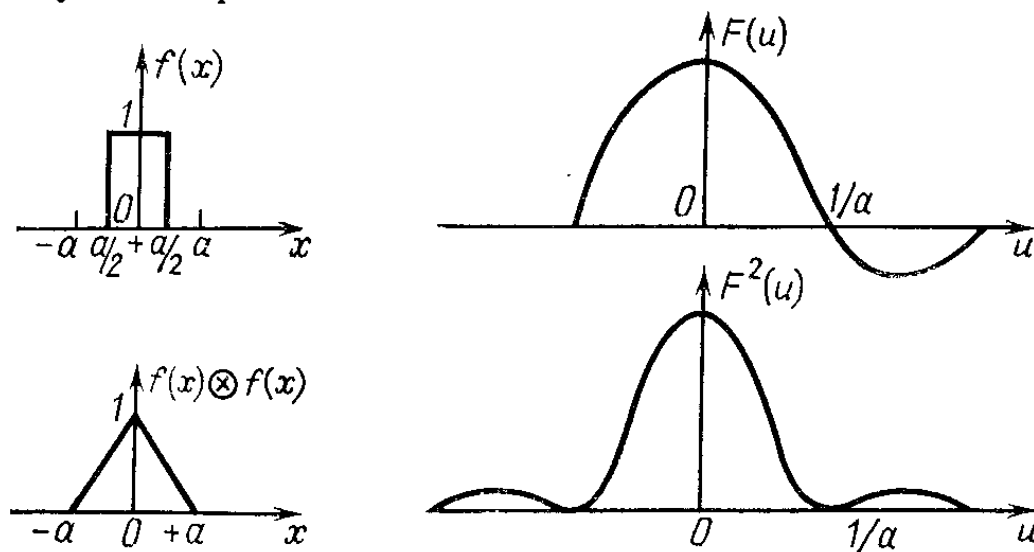
Автокорреляционная функция зрачка, известная как функция пропускания, играет очень важную роль в оптических приборах, освещаемых некогерентным светом (см. задачи 35 и 37).

Можно представить общее распределение светимости предмета суперпозицией бесконечного числа синусоидальных переменных, каждая из которых характеризуется:

определенным направлением волнового вектора;

несущей частотой, обратно пропорциональной длине волны (являющейся частотой рассматриваемой синусоидальной компоненты);

амплитудой и фазой.



Фиг. А.11

Эти различные синусоидальные компоненты проходят через оптический прибор. При этом они отфильтровываются по закону, определяемому функцией пропускания.

Функция пропускания определяет качество прибора. Она дает информацию обо всех несущих частотах. По этой причине предпочтительнее характеризовать прибор функцией пропускания, нежели его предельным разрешением, значение которого определяет предельную частоту, пропускаемую прибором, но не дает информацию о промежуточных частотах (см. задачи 35 и 37).

В. Распределение Дирака. Распределение Пуассона

Некоторые функции, такие, как $f(x) = 1$, $f(x) = \cos x$, ... не удовлетворяют условиям, необходимым для преобразования Фурье. В таких случаях Ф. Т. можно проводить только с некоторыми ограничениями.

Ряд Фурье может быть выражен в рамках Ф. Т. только с использованием распределений. Мы не станем здесь касаться теории распределений, а лишь приведем некоторые полезные определения и характеристики.

1. Распределение Дирака

1. Определение

Рассмотрим очень узкий импульс $\delta(x)$ с очень большой высотой и с площадью под кривой, равной единице:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \neq 0 \quad (52)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (53)$$

2. Графическое представление

Импульс $\delta(x)$ представляется пиком с высотой, нормированной к единице (фиг. А.12, а).

3. Свертка

Можно записать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0), \quad (54)$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a), \quad (55)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x - a) dx = f(-a). \quad (56)$$

Применяя это к свертке, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) f(x - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - y) f(y) dy = f(x), \quad (57)$$

$$\delta(x) \otimes f(x) = f(x) \otimes \delta(x) = f(x). \quad (58)$$

Функция Дирака является единичным элементом для свертки (так же как нуль является единичным элементом при сложении и единица — единичным элементом при умножении).

4. Трансляция (сдвиг)

Основываясь на предыдущем уравнении, можно написать:

$$f(x - a) = f(x) \otimes \delta(x - a). \quad (59)$$

Сдвиг можно представить как операцию свертки.

5. Преобразование Фурье

Пусть $\Delta(u)$ представляет собой Ф. Т. для $\delta(x)$:

$$\delta(x) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} \Delta(u). \quad (60)$$

Применяя теорему о свертке к (58), получаем

$$\Delta(u) \cdot F(u) = F(u), \quad (61)$$

откуда

$$\Delta(u) = 1. \quad (62)$$

Наконец

$$\delta(x) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} \Delta(u) = 1 \quad (\text{Фиг. А.12, б}) \quad (63)$$

при

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i u x} du. \quad (64)$$

Если функция Дирака сдвигается на a , найдем

$$\delta(x - a) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} e^{2\pi i u a}. \quad (65)$$

6. Свойства

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (66)$$

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (67)$$

$$f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x) \quad (68)$$

или

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a). \quad (69)$$

Принимая $f(x) = x$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x) = 0 \quad \text{или} \quad x \delta(x) = 0. \quad (70)$$

II. Ряды Фурье

1. Преобразование Фурье для распределения Пуассона (или «гребенчатого» ряда Дирака).

Констатируем без доказательства, что Ф. Т. для распределения Пуассона с периодом p — то же самое, что распределение Пуассона с периодом $1/p$ (фиг. А.13), другими словами, что

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kp) \xrightarrow{\text{Ф. Т.}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{k}{p}\right). \quad (71)$$

2. Преобразование Фурье неограниченной периодической функции

Пусть $h(x)$ — неограниченная функция с периодом p .

Можно предположить, что $h(x)$ получается путем сдвига на целые кратные значения p простой сходящейся функции $f(x)$

(фиг. А14, а). Поскольку сдвиг является процессом свертывания, можно записать

$$h(x) = f(x) \otimes \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kp). \quad (72)$$

Производя преобразование Фурье для обеих сторон, получаем

$$H(u) = F(u) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{k}{p}\right); \quad (73)$$

и может принимать только дискретные значения k/p , так что

$$H(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{k}{p}\right) \cdot \delta\left(u - \frac{k}{p}\right) \quad (74)$$

(фиг. А.14, б).

Заключение:

Г. Т. неограниченной периодической функции является некоторым распределением;

если $h(x)$ имеет период p , то $H(u)$ имеет период $1/p$;

равномерно распределенные дираковские значения равны $F(k/p)$, где $F(u)$ является Г. Т. для $f(x)$, а $F(k/p)$ — значение $F(u)$ в точке $u = k/p$.

Обратимость. Подставляя (73) в (72), можно видеть, что преобразование Фурье неограниченного периодического распределения является неограниченной периодической функцией. Это единственный случай, когда дираковские значения имеют одинаковый вес, так что преобразование Фурье некоторого распределения также является распределением.

Замечание. Частный случай периодической и ограниченной функции (или распределения) легко можно рассмотреть, пользуясь предыдущими результатами. Можно всегда принять, что ограниченная функция (или распределение) является произведением некой функции — $g(x)$ на периодическую неограниченную функцию (или распределение) (фиг. А.15). Наиболее известной функцией $g(x)$ является функция щели.

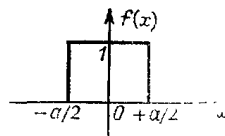
Если

$$h'(x) = h(x) \cdot g(x) \quad (\text{положительный порядок должен быть сохранен}), \quad (75)$$

$$H'(u) = H(u) \otimes G(u), \quad (76)$$

$$H'(u) = F(u) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{k}{p}\right) \cdot G(u). \quad (77)$$

1. Функция щели



Фиг. А. 1, а

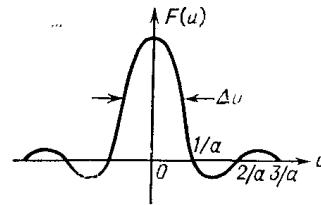
$$f(x) = 1$$

для $-a/2 < x < a/2$

$$f(x) = 0$$

для $x < -a/2$ и $x > a/2$

$$\Delta x = a$$

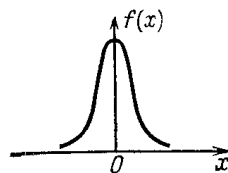


Фиг. А. 1, б

$$F(u) = \frac{\sin \pi u a}{\pi u a}$$

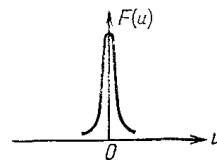
$$\Delta u = \frac{1}{a}$$

2. Функция Гаусса



Фиг. А. 2, а

$$f(x) = e^{-\pi x^2}$$



Фиг. А. 2, б

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{j2\pi u x} dx$$

Для строгого доказательства обратитесь к математическим ссылкам.
Принимается $Z = x - ju$ и предполагается, что j — постоянная;

$$F(u) = e^{-\pi u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi Z^2} dZ;$$

производя замену переменной $\pi Z^2 = X^2$, получаем

$$F(u) = e^{-\pi u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2} \frac{dX}{\sqrt{\pi}}.$$

Поскольку X и Y — независимые переменные, можно установить:

$$[F(u)]^2 = \frac{e^{-2\pi u^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(X^2+Y^2)} dX dY.$$

Вычисляя поверхностный интеграл в полярных координатах, имеем

$$\begin{aligned} [F(u)]^2 &= \frac{e^{-2\pi u^2}}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = e^{-2\pi u^2} \int_0^\infty e^{-\rho^2} d(\rho^2) = \\ &= -e^{-2\pi u^2} [e^{-\rho^2}]_0^\infty = e^{-2\pi u^2}, \\ f(x) &= e^{-\pi x^2}, \quad F(u) = e^{-\pi u^2}. \end{aligned}$$

В более общем случае:

$$f(x) = e^{-\pi x^2/a^2}, \quad F(u) = e^{-\pi a^2 u^2}.$$

влияние пространственных размеров источника
(задача 3)

$$\Delta\sigma \cdot \Delta x = 1$$

влияние размеров щели на дифракционное изо-
бражение (задача 35)

$$\Delta x \cdot \Delta u = 1$$

влияние ширины энергетического уровня на время
изгиб волнового пакета (задача 71)

$$\Delta W \cdot \Delta t = 1$$

влияние неопределенности импульса на положение
частицы (задача 57)

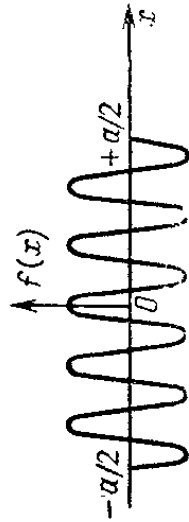
$$\Delta p \cdot \Delta x = h$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Предшествующие приложения можно также
рассмотреть с помощью кривой Гаусса

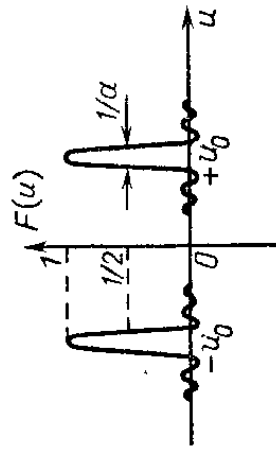
ПРИЛОЖЕНИЕ А

3. Ограниченная косиноида



Фиг. А. 3, а

$$f(x) = \cos 2\pi u_0 x$$

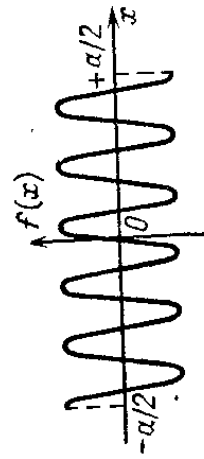
для $-a/2 < x < a/2$ 

Фиг. А. 3, б

$$F(u) = \frac{\sin \pi (u + u_0) a}{\pi (u + u_0) a} + \frac{\sin \pi (u - u_0) a}{\pi (u - u_0) a}$$

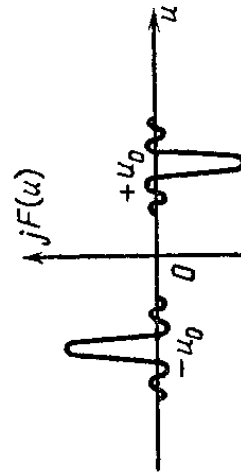
Идеально монохроматический волновой пучок конечной длительности дает спектральную линию конечной ширины. Центр линии соответствует частоте ν_0 , ширина линии равна $1/\tau$, где τ — время жизни волнового пучка (задача 3). Подобным же образом при ширине волнового пучка Δx находим $\Delta \sigma \cdot \Delta x = 1$

4. Ограниченная синусоида



Фиг. А. 4, а

$$f(x) = \sin 2\pi u_0 x$$

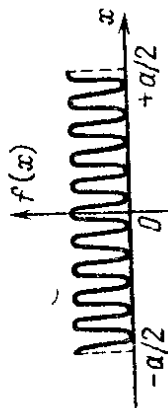
для $-a/2 < x < a/2$ 

Фиг. А. 4, б

$$F(u) = \frac{1}{j} \left[\frac{\sin \pi (u + u_0) a}{\pi (u + u_0) a} - \frac{\sin \pi (u - u_0) a}{\pi (u - u_0) a} \right]$$

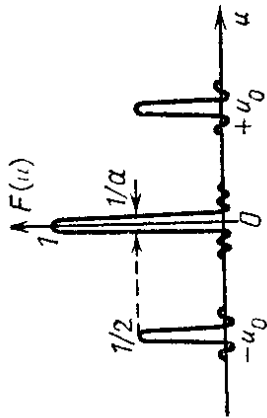
Синусоидальная и косинусоидальная системы приводят к образованию только двух спектров (задача 35)

5. $f(x) = 1 + \cos 2\pi u_0 x$
для $-a/2 < x < a/2$



Фиг. А. 5, а

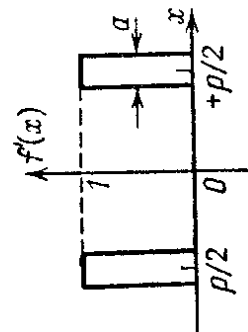
При прохождении через решетку $f(x)$ дает три неодинаковых спектра



Фиг. А. 5, б

$$F(u) = \left[\frac{\sin \pi u a}{\pi u a} + \frac{1}{2} \frac{\sin \pi (u + u_0) a}{\pi (u + u_0) a} + \frac{1}{2} \frac{\sin \pi (u - u_0) a}{\pi (u - u_0) a} \right]$$

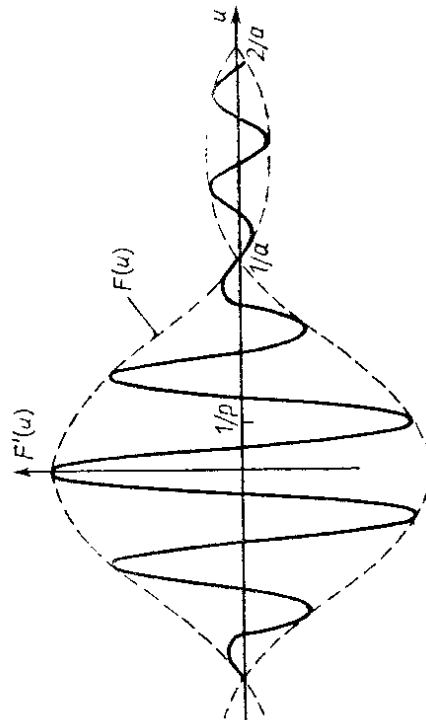
6. Щели Юнга



Фиг. А. 6, а

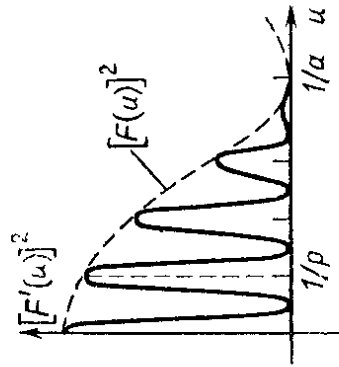
Две идентичные щели шириной a и расстоянием между ними l

$$f'(x) = f\left(x + \frac{p}{2}\right) + f\left(x - \frac{p}{2}\right)$$



Фиг. А. 6, б

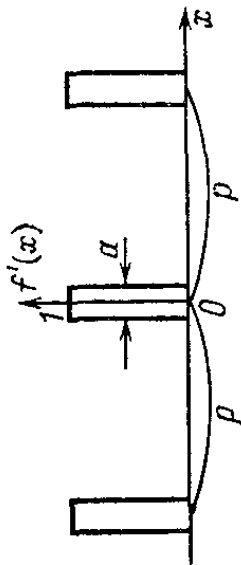
$$F'(u) = \frac{\sin \pi u a}{\pi u a} \cos \pi p u$$



Фиг. А. 6, в

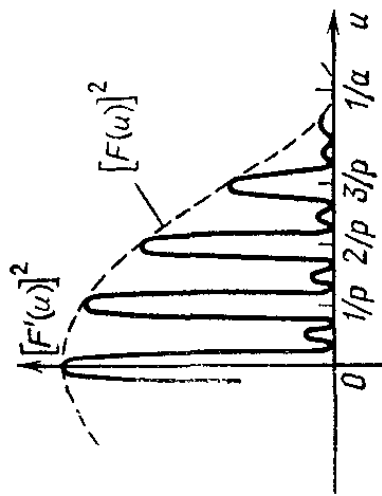
$$[F'(u)]^2 = \frac{1}{2} [F(u)]^2 (1 + \cos 2\pi p u)$$

7. Три идентичные щели



Фиг. А.7, а

$$f'(x) = (x) + i(x+p) + i(x-p)$$

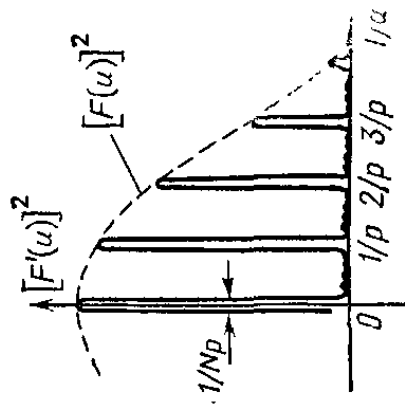


Фиг. А.7, б

$$F'(u) \approx F(u) [1 + 2 \cos 2\pi pu]$$

8. N идентичных щелей (решетка)

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{N-1} i(x + np)$$



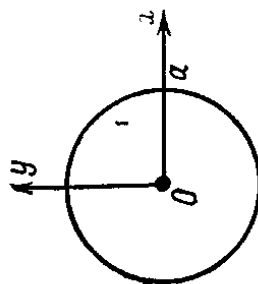
Фиг. А.8

$$F'(u) \approx F(u) \frac{\sin N\pi pu}{\sin \pi pu}$$

Можно сравнить три графика, представляющих $[F'(u)]^2$ в пунктах 6, 7 и 8:

модуляция функцией $F(u)$ одна и та же, положение спектров одно и то же, ширина спектров зависит от количества щелей

9. Круговая функция



Фиг. А. 9, а

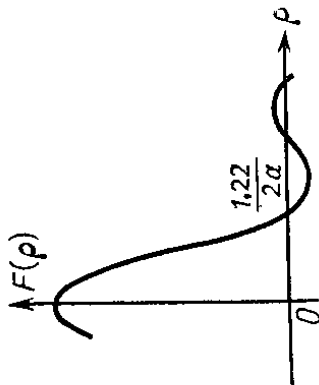
$$f(r) = \frac{1}{\pi a^2}$$

для $x^2 + y^2 = r^2 < a^2$

Функция Эйри

Если $u^2 + v^2 = \rho^2$

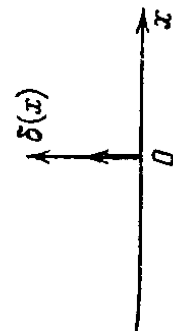
$$F(\rho) = 2 \frac{J_1(2\rho a)}{2\rho a}$$



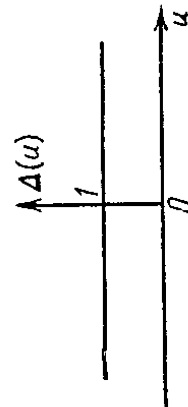
Фиг. А. 9, б

См. задачу 36

10. Импульс Дирака



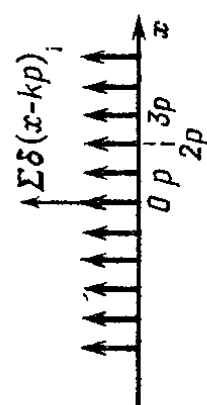
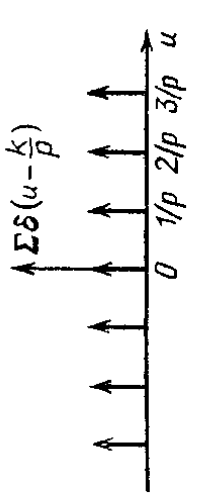
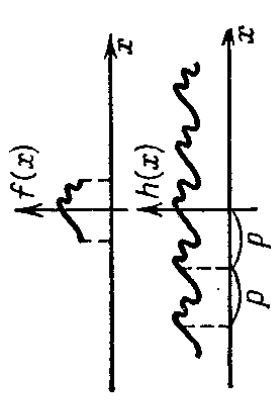
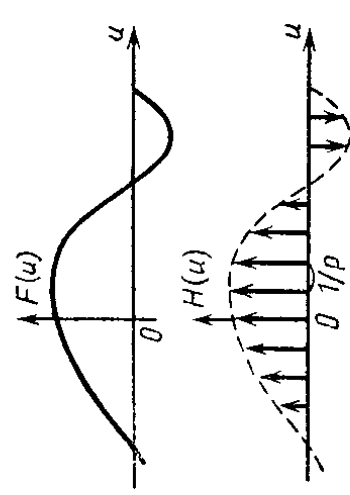
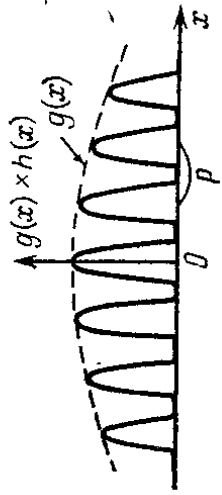
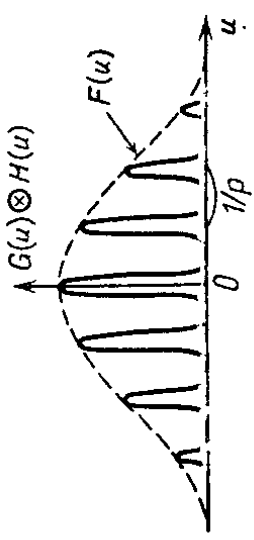
Фиг. А. 12, а



Фиг. А. 12, б

Соотношения неопределенности
Если одна переменная имеет абсолютно определенное значение, то сопряженная с ней переменная полностью неопределена. Можно рассмотреть примеры, данные на фиг. 1

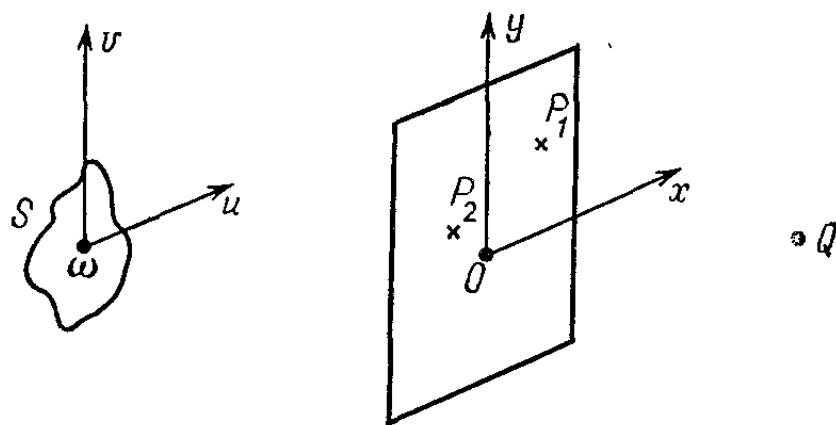
Продолжение

11. Ряд Дирака  Фиг. А. 13, а	 Фиг. А. 13, б	Решетка бесконечно узкие щели период шетки p ширина ∞ → спектр бесконечное число линий интервал $1/p$ Бесконечно резкий
12. Неограниченная периодическая функция  Фиг. А. 14, а	 Фиг. А. 14, б	Решетка ширина щели a период шетки p длина ∞ → спектр модулированный с периодом $1/a$ дом $1/a$ интервал $1/p$ бесконечно резкий
13. Ограниченная периодическая функция  Фиг. А. 15, а $h(x) = f(x) \otimes \sum \delta(x - kp)$ $h'(x) = g(x) \cdot h(x)$	 Фиг. А. 15, б $H(u) = \sum F\left(\frac{k}{p}\right) \delta\left(u - \frac{k}{p}\right)$ $H'(u) = H(u) \otimes G(u)$	Решетка ширина щели a период шетки p длина L → спектр модулированный с периодом $1/a$ интервал $1/p$ ширина $1/L$ Эти результаты можно сравнить с результатами, полученными на фиг. А. 8

СТЕПЕНЬ КОГЕРЕНТНОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ, ОСВЕЩАЕМЫМИ УДАЛЕННЫМ МОНОХРОМАТИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ

Имеется:

конечный, протяженный монохроматический источник, каждая точка которого представлена текущими координатами u и v ; экран, имеющий два одинаковых отверстия P_1 и P_2 (фиг. Б.1).



Фиг. Б.1.

Если a_1 и a_2 — амплитуды колебаний, пропускаемых отверстиями P_1 и P_2 , то энергия в произвольной точке Q интерференционного поля равна:

$$\langle AA^* \rangle = \langle (a_1 + a_2 e^{i\varphi}) (a_1^* + a_2^* e^{i\varphi}) \rangle, \quad (1)$$

где φ — разность фаз, приобретаемая при прохождении P_1Q и P_2Q .

Уравнение (1) можно также записать в виде

$$\langle AA^* \rangle = \langle a_1 a_1^* \rangle + \langle a_2 a_2^* \rangle + 2 \operatorname{Re} [\langle a_1 a_2^* e^{-i\varphi} \rangle], \quad (2)$$

(где Re означает действительную часть).

Поскольку φ не зависит от времени, нужно использовать только средние значения переменных, следовательно:

$$\langle AA^* \rangle = \langle a_1 a_1^* \rangle + \langle a_2 a_2^* \rangle + 2 \operatorname{Re} [\langle a_1 a_2^* \rangle e^{-i\varphi}]. \quad (3)$$

С учетом

$$a_1 a_2^* = |a_1 a_2^*| e^{-i\theta};$$

уравнение (3) преобразуется к виду

$$\langle AA^* \rangle = \langle a_1 a_1^* \rangle + \langle a_2 a_2^* \rangle + 2 \langle |a_1 a_2^*| \rangle \cos(\varphi + \theta). \quad (4)$$

Находим:

максимальную освещенность (при $\varphi + \theta = 2k\pi$)

$$I_{\text{макс}} = \langle a_1 a_1^* \rangle + \langle a_2 a_2^* \rangle + 2 \langle |a_1 - a_2^*| \rangle. \quad (5)$$

минимальную освещенность [при $\varphi + \theta = (2K + 1)\pi$]

$$I_{\text{мин}} = \langle a_1 a_1^* \rangle + \langle a_2 a_2^* \rangle - 2 \langle |a_1 a_2^*| \rangle. \quad (6)$$

Если считать, что контрастность определяется выражением

$$\Gamma = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}}, \quad (7)$$

то Γ можно записать в виде

$$\Gamma = \frac{2 \langle |a_2 a_2^*| \rangle}{\langle a_1 a_1^* \rangle + \langle a_2 a_2^* \rangle}. \quad (8)$$

Рассмотрите атом с координатами u и v , излучающий колебание $a(t)$. Эти колебания в точках P_1 и P_2 можно записать соответственно как

$$a(t) e^{-j2\pi(u x_1 + v y_1)} \quad \text{и} \quad a(t) e^{-j2\pi(u x_2 + v y_2)}. \quad (9)$$

Обозначьте индексом i отдельный атом источника. Вклад этих атомов источника в колебания в точках P_1 и P_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum a_i(t) e^{-j2\pi(u_i x_1 + v_i y_1)}, \\ a_2 &= \sum a_i(t) e^{-j2\pi(u_i x_2 + v_i y_2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Можно принять

$$\langle a_1 a_2^* \rangle = \sum a_i(t) e^{-j2\pi(u_i x_1 + v_i y_1)} \sum a(t) e^{j2\pi(u_j x_2 + v_j y_2)}. \quad (11)$$

Выделим произведения, относящиеся к одному атому, и произведения, относящиеся к двум различным атомам (последние равны нулю, поскольку рассматриваемые атомы излучают некогерентно). Имеем

$$\langle a_1 a_2^* \rangle = \sum \langle a_i a_i^* \rangle e^{-j2\pi[u_i(x_1 - x_2) + v_i(y_1 - y_2)]}. \quad (12)$$

Поскольку плотность атомов велика, суммирование можно заменить интегрированием:

$$\langle a_1 a_2^* \rangle = \int \int_S I(u, v) e^{-j2\pi[u(x_1 - x_2) + v(y_1 - y_2)]} du dv, \quad (13)$$

где $I(u, v)$ определяет вклад энергии от элемента источника с координатами u, v .

Дополнительно запишем

$$\langle a_1 a_1^* \rangle = \langle a_2 a_2^* \rangle = \int \int_S I(u, v) du dv. \quad (14)$$

Степень частичной когерентности между P_1 и P_2 можно тогда записать в виде

$$\Gamma(x_1 - x_2; y_1 - y_2) = \frac{\iint_S I(u, v) e^{-j2\pi[u(x_1 - x_2) + v(y_1 - y_2)]} du dv}{\iint I(u, v) du dv}. \quad (15)$$

Теорема Ван Циттерта — Цернике

Степень когерентности между фиксированной точкой P_1 и произвольной точкой P_2 , освещаемыми протяженным монохроматическим источником, равна нормированной комплексной амплитуде в соответствующей точке P_2 некоторой дифракционной картины с центром в точке P_1 . Это искусственная дифракционная картина получается заменой источника отверстием, имеющим такие же размеры и форму, как источник, и с амплитудным распределением в отверстии, равным распределению интенсивности в источнике.

- Аббе опыт 184
 Автокорреляция 395
 Аномальная дисперсия 250
 Антенны 81
 Аподизация 173, 181
 Аппаратная функция 18
 Атомные спектры 329
 Ахроматические полосы 20
- Бабине принцип 179
 Бесселя функция 174
 Бора постулат 330, 332
 Борна — Оппенгеймера приближение 325
 Брэгга формула 226
- Ван Циттерта — Цернике теорема 14, 409
 Верде постоянная 152
 Видность 7
 Вина постоянная 306
 Возмущение второго порядка 316
 — первого порядка 312
 Волны в плазме 272
 — де Бройля 278
 — распространение в периодической дискретной среде 238
 Восстановление формы объекта 197
 Вращательная способность 125
 Вращательное квантовое число 325
 Вращательный спектр 372
- Гармонический осциллятор 283
 Гаусса функция 400
 Гейзенберга микроскоп 283
 Германий, оптические константы 100
 Герца диполи 81, 86, 259
 Глана поляризатор 123
 Глазеврука призма 122
 Голография 196
 Граница поглощения рентгеновских лучей 364
 Групповая скорость 231
 Гюйгенса построение 138
- Давление излучения 80
 Двойная потенциальная яма 295
 Двоякопреломляющая призма 117
- Двухатомные молекулы, колебательно-вращательная энергия 325
 — — эффект Штарка 316
 Двухэлектронные атомы, основное состояние 310
 — — спектральные термы 355
 — — эффект Зеемана 360
 Дейтрон 292
 Дирака импульс 405
 — распределение 396
 Дисперсия 231, 279
 — в области слабого поглощения 247
 — для классических металлов 257
 — формула Зельмейера 241
 Дифракция 154
 — на круглом зрачке 171
 — — решетке 159
 — от щели 156
 — рентгеновских лучей 224
 Дихроизм 145
 — круговой 145
- Закон Кирхгофа 105
 — Мозли 364
 — Рэлея — Джинса 306
 — Стефана 306
 Зельмейера формула 241, 254
- Излучение 93
 — формула Планка 305
 Интерференционные полосы, контрастность 134
 Интерференция радиоволн 57
 — световых волн 7
 Интерферометр Майкельсона 33
 — Маха 28
 — поляризационный 136
 — Фабри — Перо 48
 Ионные кристаллы, дисперсия в ИК-области 264
- Кастлера — Монтарнала установка 223
 Классический атом, модель рассеяния 255
 Когерентности степень 407
 Когерентность частичная 409

- Комплексная диэлектрическая проницаемость 262
 Комптоновская длина волны 278
 Контрастность 29, 217, 403
 — полос Юнга 7
 — фазовая 217
 Корреляция 395

Лазер, спектры 95
 — энергия 95
 Ланде множитель 348
 Линзы голографические 202
 Лучепреломление двойное 110
 — — в электрическом поле 143

Молекулярные спектры 329
 Монохроматор 129
 — с двойным лучепреломлением 129
 Мюллера матрицы 111

Ньютона кольца 65

Операторы углового момента 301
 Оптическая плотность 7
 Основное состояние гелия 312
 Осциллятора сила 242

Парсеваля теорема 189, 394
 Пары олова, дисперсия 253
 Плазма 372
 Пластика полуволновая 131, 137
 — четвертьволновая 126
 Поглощение 93, 101
 Пойнтинга вектор 83
 Показатель преломления комплексный 267
 Полосатые спектры 123, 250
 Поляризационные призмы 120
 Поляризация резонансного излучения 348
 Потенциал внутримолекулярный этана 319
 Потенциальный барьер 289
 Пуанкаре сфера 110
 Пуассона распределение 396

Радиоволны 57
 Разрешающая способность 186
 Рассеяние излучения 255
 Резонансное излучение 348
 Резонаторы 77
 Рентгеновские лучи 224, 364
 Рентгеновский спектрометр 228
 Рефракция 231
 Решетка нерегулярная 212
 — отражательная 206
 — синусоидальная 168, 205
 — фазовая 216
 — Фраунгофера 184, 212
 — Фуко 168, 209
 — эшелетт 207, 210

Свертка 393
 Серия Бальмера 329, 330, 332, 334, 343
 — Лаймана 333, 343
 — Пашена 343, 345
 — Пикеринга 329, 334
 — Ридберга 329, 334
 Слоистые среды 66
 Скорость света 377
 — — в движущейся воде 236
 — — измерение методом Фуко 232
 Соотношение неопределенности 282
 Спектр атома водорода 329
 — дейтерия 329
 — комбинационного рассеяния 380
 — лития 335
 — рентгеновских лучей 364
 — термы 335, 350, 355
 — ширина линии 336, 353
 Стокса вектор 111

Тонкие пленки 62
 — — поглощение 270
 — — пропускание 270

Удельная теплоемкость 379

Фабри — Перо спектроскопия 48
 — — эталон 41
 Фазовая пластинка 182
 — скорость 231
 Фокусирующие дефекты 173, 183
 Френеля — Араго опыты 130
 — формулы 60, 62, 117
 Фурье преобразование 9, 15, 189, 388

Цветное тело 101

Черное тело 101

Эйри диск 178
 Электромагнитная оптика 57
 Электромагнитные волны 278
 — — в плазме 272
 Этан 319
 Эффект Доплера 233, 236, 343
 — — Физо 336
 — Зеемана 349, 360
 — Комптона 302
 — Мессбауэра 369
 — Штарка 316
 Экранирование 366

Юнга полосы 7, 20

Предисловие	5
ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ	7
1. Контрастность полос Юнга	7
2. Опыт Юнга. Ахроматические полосы	20
3. Фурье-спектроскопия	23
4. Интерферометр Маха	28
5. Интерферометр Майкельсона	33
6. Интерференционные фильтры	40
7. Эталон Фабри — Перо. Использование экранов	41
8. Наблюдение фазовых объектов методом Толанского	44
9. Спектроскопия Фабри — Перо (интерференционная)	48
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ОПТИКА	57
10. Интерференция радиоволн	57
11. Формулы Френеля	60
12. Формулы Френеля. Тонкие пленки	62
13. Кольца Ньютона в поляризованном свете	65
14. Распространение волн в слоистой диэлектрической среде	66
15. Электромагнитные волны в резонаторе	77
16. Давление излучения	80
17. Антенны	81
18. Диполи Герца	86
ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ	93
19. Фотометрия. Система Земля — Солнце	93
20. Спектры и энергия лазера	95
21. Оптические константы германия	100
22. Поглощение. Черные и цветные тела	101
23. Поглощение. Закон Кирхгофа	105
ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ	110
24. Параметры Стокса. Представление Пуанкаре. Матрицы Мюллера	110
25. Формулы Френеля. Двойкопреломляющая призма	117
26. Поле поляризующих призм	120
27. Вращательная дисперсия	123
28. Двукратное прохождение лучей через четвертьволновую пластинку	126
29. Двойкопреломляющий монохроматор	129
30. Опыты Френеля и Араго	130
31. Поляризационный интерферометр. Дифференциальный метод	136
32. Электрическое двойное лучепреломление	143

33. Вращательная способность. Круговой дихроизм	145
34. Эффект Фарадея	151

ДИФРАКЦИЯ 154

35. Дифракция на большом расстоянии	154
36. Дифракция на круглом зрачке	171
37. Опыт Аббе	184
38. Голография	196
39. Отражательные решетки	206
40. Нерегулярная решетка	212
41. Фазовая решетка	216
42. Получение и дифракция рентгеновских лучей	224
43. Рентгеновский спектрометр с изогнутым кристаллом	228

РЕФРАКЦИЯ И ДИСПЕРСИЯ 231

44. Групповая и фазовая скорости	231
45. Измерение скорости света методом Фуко	232
46. Скорость света в движущейся воде	236
47. Распространение волн в периодической дискретной среде	238
48. Дисперсионная формула Зельмейера	241
49. Дисперсия в области слабого поглощения	247
50. Полосатые спектры. Аномальная дисперсия в парах	250
51. Рассеяние электромагнитного излучения в классической атомной модели	255
52. Дисперсия и отражение ионных кристаллов в инфракрасной области спектра	264
53. Пропускание поглощающей тонкой пленки	270
54. Электромагнитные волны в плазме	272
55. Колебания плазмы	275

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА 278

56. Электромагнитные волны и волны де Бройля	278
57. Пять упражнений на соотношение неопределенности	282
58. Потенциальный барьер	286
59. Дейтрон	292
60. Двойная потенциальная яма	295
61. Операторы углового момента	301
62. Эффект Комптона	302
63. Формула излучения Планка	305
64. Основное состояние двухэлектронного атома	310
65. Возмущение первого порядка. Основное состояние атома гелия	312
66. Возмущение второго порядка. Эффект Штарка для ротатора	316
67. Внутримолекулярный потенциал этана	319
68. Колебательно-вращательная энергия двухатомной молекулы	325

АТОМНЫЕ И МОЛЕКУЛЯРНЫЕ СПЕКТРЫ 329

69. Спектр атома водорода	329
70. Спектр нейтрального лития	335
71. Эффект Доплера. Ширина спектральной линии	343
72. Поляризация резонансного излучения	348
73. Спектральные термы двухэлектронных атомов	355
74. Эффект Зеемана для двухэлектронного атома	360
75. Спектры рентгеновских лучей	364
76. Эффект Мессбауэра	369

77. Колебательный и вращательный спектры молекулы иодистого водорода	372
78. Расчет скорости света	377
79. Спектроскопия и удельная теплоемкость	379
Приложение А	388
Преобразование Фурье	388
Приложение Б	407
Степень когерентности между двумя точками, освещаемыми удаленным монохроматическим источником	407
Предметный указатель	410